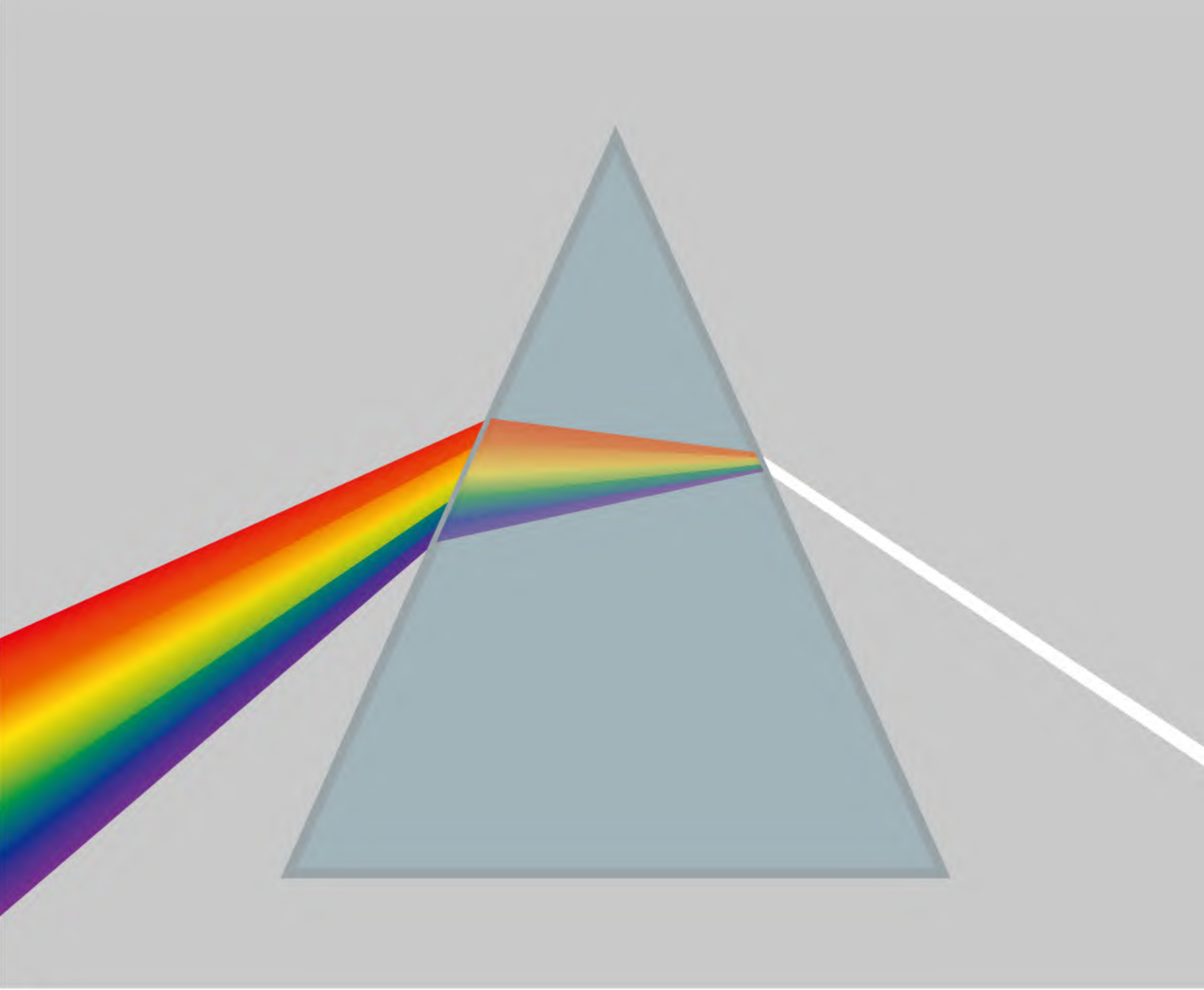


朝花夕拾物理学

College physics knowledge collation

作者 张天乙

目录

序言　书籍的阅读要从厚到薄，再从薄到厚。本次整理的目的就是实现前半句，以最精炼的语言整理大学学过的物理课程

Part I

第一部分：理论

1

力学与理论力学

1.1 最小作用量原理

1.2 Lagrange 方程的导出

1.3 自由与非自由粒子的 Lagrange 函数形式

1.4 诺特定理：每一种对称性都有对应的守恒量

1.5 开普勒问题（吸引力的平方反比定律对应于椭圆轨道）

1.6 卢瑟福公式

1.7 哈密顿方程的导出

1.8 正则变换

1.9 刘维尔定理

1.10 作为坐标函数的作用量

1、最小作用量原理

一个系统的状态可以由拉格朗日函数 $L(q_1,\cdots,q_s,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s;t)=T-V$ 来表示，该系统随时间的演化一定满足使得积分

$$S=\int_0^t L\,dt$$

取极值，S称为作用量。

2、Lagrange 方程的导出

$$\delta S=\int_0^t \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i dt+\int_0^t \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i dt$$

又 $\int_0^t \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i dt=\int_0^t \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\delta q_i=\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_0^t-\int_0^t \sum_i \delta q_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}dt$

又在0与t时刻 $\delta(q_i)=0$

$$\Rightarrow \delta S=\int_0^t \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\,dt=0.$$

由于 δq_i 的任意性

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad (\text{Lagrange 方程}).$$

3、自由与非自由粒子的Lagrange函数形式.

惯性参考系：空间相对于它是均匀且各向同性的，时间相对于它是均匀的。

物体在空间中不同位置的力学意义是等价的。

对于自由粒子，由于空间的均匀~~且各向同~~性，L 不含有 $\vec{r}$，又由于时间的均匀性，L 不含有 t，由于空间的各向同性，L 不依赖于 $\vec{v}$ 的方向，也就是说 L 是 $|\vec{v}|^2=v^2$ 的函数

$$L=L(v^2).$$

伽利略相对性原理：力学运动方程在伽利略变换下具有不变性。

$$L(|\vec{v}+\vec{\varepsilon}|)=L(v^2+2\vec{v}\cdot\vec{\varepsilon}+\varepsilon^2)\approx L(v^2)+\frac{\partial L}{\partial v^2}\cdot 2\vec{v}\cdot\vec{\varepsilon}.$$

当拉格朗日函数相差一个位置与时间的函数对时间的全导数时，它们满足的运动方程是相同的 $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial v^2}=\text{const}.$

$$\text{设 } L=\frac{m}{2}v^2.$$

非自由粒子，定义 $L=\frac{m}{2}v^2-U(\vec{r})$，$U(\vec{r})$ 称为质点的势能.

由 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}=\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\Rightarrow m\dot{\vec{v}}=-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$ 即 $\vec{F}=-\nabla U$

5、诺特定理：每一种对称性都有对应的守恒量.

(1) 时间平移对称性（均匀性）与能量守恒.

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i=\sum_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\Rightarrow\frac{d}{dt}\left[L-\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right]=0.$$

$\cancel{\therefore\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=const}$ $\therefore\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=const$，这个物理量称为能量.

(2) 空间平移对称性与动量守恒.

$$\delta L=\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)=0$$

令 $\delta q_i=\varepsilon$，则 $\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=const$，这个物理量称为动量.

(3) 空间旋转对称性与角动量守恒.

令 $\delta q_i=\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}$

$$\Rightarrow\delta L=\frac{d}{dt}\left(\vec{p}\cdot(\delta\vec{\varphi}\times\vec{r})\right)=\frac{d}{dt}\left((\vec{r}\times\vec{p})\cdot\delta\vec{\varphi}\right)=0$$

则 $\vec{r}\times\vec{p}=const$，这个物理量称为角动量.

6、开普勒问题（吸引力的平方反比定律对应于椭圆轨道）.

$\vec{r}=r\vec{e_r}$，$\dot{\vec{r}}=\dot{r}\vec{e_r}+r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$，$\ddot{\vec{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{e_r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}$

$$\begin{cases}E=\frac{m}{2}v^2+\frac{\alpha}{r}=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{\alpha}{r} & \text{(总能量守恒)}\\ L=|\vec{r}\times m\vec{v}|=mr^2\dot{\theta} & \text{(总角动量守恒)}.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{dr}{dt}=\dot{r}=\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{\alpha}{r}\right)-r^2\dot{\theta}^2}=\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{L^2}{m^2r^2}}$$

$$\because\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{L}{mr^2}=\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{L^2}{m^2r^2}}$$

令 $t=\frac{1}{r}$

$$\Rightarrow\frac{dt}{d\theta}=-\frac{m}{L}\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{2\alpha}{m}t-\frac{L^2}{m^2}t^2}=-\sqrt{-t^2-\frac{2m\alpha}{L^2}t+\frac{2mE}{L^2}}$$

$$\frac{dt}{\sqrt{-(t+\frac{m\alpha}{L^2})^2+\frac{2mE}{L^2}+\frac{m^2\alpha^2}{L^4}}} = -d\theta$$

令 $x = t+\frac{m\alpha}{L^2}$

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2}+\frac{m^2\alpha^2}{L^4}-x^2}} = -d\theta$$

$r: r_{min} \to r$. $t: t_{max} \to t$. $x: x_{max} \to x$. $\theta: 0 \to \theta$.

$$\arccos\frac{x}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2}+\frac{m^2\alpha^2}{L^4}}} - \arccos\frac{x_{max}}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2}+\frac{m^2\alpha^2}{L^4}}} = \theta$$

$$x = \cos\left(\arccos\frac{x_{max}}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2}+\frac{m^2\alpha^2}{L^4}}} - \theta\right)\cdot\sqrt{\frac{2mE}{L^2}+\frac{m^2\alpha^2}{L^4}}$$

接下来算 x_{max}: $\begin{cases} E = \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 + \frac{\alpha}{r} \\ L = mr^2\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow E = \frac{m}{2}\frac{L^2r^2}{m^2r^4} + \frac{\alpha}{r} = \frac{L^2}{2m}t^2 + \alpha t$.

$$t^2 + \frac{2m\alpha}{L^2}t = \frac{2mE}{L^2}$$

$$t_{max} = -\frac{m\alpha}{L^2} + \sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{L^4}+\frac{2mE}{L^2}}$$

$$x_{max} = \sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{L^4}+\frac{2mE}{L^2}} \Rightarrow x = \cancel{\arccos}\cos(\arccos 1 - \theta) = \cos\theta$$

即 $\frac{1}{r} + \frac{m\alpha}{L^2} = \cos\theta\cdot\sqrt{\frac{2mE}{L^2}+\frac{m^2\alpha^2}{L^4}}$.

$$r = \frac{1}{\frac{m\alpha}{L^2} - \cos\theta\cdot\sqrt{\frac{2mE}{L^2}+\frac{m^2\alpha^2}{L^4}}} \quad \cancel{= \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{\theta 1 + \sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}\cos\theta}}$$

若是吸引力, $\alpha<0 \Rightarrow r = \frac{1}{\frac{m|\alpha|}{L^2} + \sqrt{\frac{2mE}{L^2}+\frac{m^2\alpha^2}{L^4}}\cos\theta} = \frac{\frac{L^2}{m|\alpha|}}{1+\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}\cos\theta} = \frac{p}{1+e\cos\theta}$

周期的计算: $\frac{m}{2}r\cdot r\dot{\theta} = \frac{mr^2\dot{\theta}}{2} \Rightarrow m\cdot S = T\cdot X$

$$\therefore T = \frac{m\cdot\pi ab}{X} = \frac{m\pi}{L}\cdot\frac{\alpha}{2|E|}\cdot\frac{L}{\sqrt{2m|E|}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

卢瑟福公式

代入 $U = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 即可. 结合 $E = \frac{mv_0^2}{2}$, $L = mv_0 b$.

8、哈密顿方程的导出

定义 $H=\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$ 为系统的哈密顿量，当系统具有时间平移对称性时，哈密顿量对应于系统的总能量，且是一个守恒量。

由于动量的定义式为 $p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$，所以哈密顿量可以写成 $H=\sum_i p_i\dot{q}_i - L$，它的微分形式为

$$dH=\sum_i\left(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i\right)\right)$$

$$=\sum_i\left(\dot{q}_i dp_i - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}dq_i\right)$$

$$=\sum_i\left(\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i\right)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\ \text{(哈密顿方程)}.$$

9、正则变换

哈密顿方程可由最小作用量原理推出

$$\delta S=\delta\int_0^t\left(\sum_i p_i\dot{q}_i - H\right)dt$$

$$=\delta\int_0^t\left(\sum_i p_i dq_i - H dt\right)=0.$$

若变换 $Q(q,p)$, $P(q,p)$ 满足

$$\sum_i p_i dq_i - H dt = \sum_i P_i dQ_i - H' dt + dF$$

则称该变换为正则变换，对应的 F 称为母函数，且

$$p_i=\frac{\partial F}{\partial q_i},\ P_i=-\frac{\partial F}{\partial Q_i},\ H'=H+\frac{\partial F}{\partial t}.$$

10. 刘维尔定理：$\Gamma=\int\cdots\int dq_1\cdots dq_s dp_1\cdots dp_s$ 在系统演化的过程中不变.

证明：$\Gamma=\iiint dq_1\cdots dq_s dp_1\cdots dp_s=\int\cdots\int D\cdot dQ_1\cdots dQ_s dP_1\cdots dP_s$.

$$D=\frac{\partial(q_1,\cdots,q_s,p_1,\cdots,p_s)}{\partial(Q_1,\cdots,Q_s,P_1,\cdots,P_s)}=\frac{\partial(q_1,\cdots,q_s,p_1,\cdots,p_s)}{\partial(q_1,\cdots,q_s,P_1,\cdots,P_s)}\cdot\frac{\partial(q_1,\cdots,q_s,P_1,\cdots,P_s)}{\partial(Q_1,\cdots,Q_s,P_1,\cdots,P_s)}$$

$$=\frac{\partial(p_1,\cdots,p_s)}{\partial(P_1,\cdots,P_s)}\cdot\frac{\partial(q_1,\cdots,q_s)}{\partial(Q_1,\cdots,Q_s)}$$

（由运动中 p,q 的变化可看作正则变换 $dS=\sum(p_{t+\tau}dq_{t+\tau}-p_t dq_t)-(H_{t+\tau}-H_t)dt$）

选取母函数 $\Phi(q_1,q_2,\cdots,q_s,P_1,P_2,\cdots,P_s)$，有 $p_i=\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}$, $Q_i=\frac{\partial\Phi}{\partial P_i}$

$\therefore \frac{\partial p_i}{\partial P_j}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_i\partial P_j}$, $\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_j\partial P_i}$ $\Rightarrow D=1$ 证毕 □.

11、作为坐标函数的作用量

$$S = \int_0^t L\,dt$$

$$\delta S = \int_0^t \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) dt$$

$$= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \int_0^t \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\, dt$$

$$= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i = \sum_i p_i \delta q_i$$

$$\therefore p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

若将作用量视为时间与坐标的函数.

$$\frac{dS}{dt} = L = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\cdot \dot{q}_i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = -\sum_i p_i \dot{q}_i + L = -H$$

$$\therefore dS = -H\,dt + p_i\,dq_i .$$

2
电磁学与电动力学

2.1 库仑定律和毕奥-萨伐尔定律

2.2 麦克斯韦方程组

2.3 两种势与两种规范

2.4 电势多级展开，磁矢势多级展开

2.5 电偶极子与磁偶极子在外场下受的力和力矩

2.6 电场和磁场的能量

2.7 守恒定律

2.8 真空中电磁波

2.9 介质中反射与折射

2.10 波导中电磁波

2.11 推迟势和杰斐缅柯方程

2.12 点电荷的李纳-维谢尔势

2.13 Maxwell 方程组的时间与空间反演对称性

2.14 任意源的辐射

2.15 带电粒子在电磁场中的哈密顿量

1、库仑定律和毕奥萨伐尔定律.

这两个定律都是实验定律，前者给出了静止电荷产生电场的表达式，后者给出稳恒电流产生磁场的表达式。

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho\hat{n}}{n^2} d\tau' \quad , \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\times\hat{n}}{n^2} d\tau'$$

式中 $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ C^2/(N\cdot m^2)$，$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}(N/A^2)$

2、麦克斯韦方程组.

①真空中的静电场与静磁场.

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}')\,\nabla\cdot\left(\frac{\hat{n}}{n^2}\right)d\tau'$$

由 $\nabla^2\left(\frac{1}{n}\right) = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{n})$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot4\pi\rho(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$$

$$\nabla\times\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}')\cdot\nabla\times\left(-\nabla\frac{1}{n}\right)d\tau' = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\times\vec{E} = 0}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\cdot\left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')\times\hat{n}}{n^2}\right)d\tau'$$

$$= \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left[\vec{J}(\vec{r}')\cdot\left(-\nabla\times\frac{\hat{n}}{n^2}\right) + \frac{\hat{n}}{n^2}\cdot(\nabla\times\vec{J}(\vec{r}'))\right]d\tau'}_{=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{B} = 0}.$$

$$\nabla\times\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\times\left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')\times\hat{n}}{n^2}\right)d\tau'.$$

$$= \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left[\vec{J}(\vec{r}')\left(\nabla\cdot\frac{\hat{n}}{n^2}\right) - (\vec{J}(\vec{r}')\cdot\nabla)\frac{\hat{n}}{n^2}\right]d\tau'}_{=\mu_0\vec{J}(\vec{r})}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}(\vec{r})}.$$

②介质中的静电场与静磁场.

电介质在电场作用下会发生极化，用$\vec{P}$表示极化强度.
磁介质在外磁场作用下会发生磁化，用$\vec{M}$表示磁化强度.

$$\vec{P}=\frac{\sum \vec{p}_i}{V} \quad , \quad \vec{M}=\frac{\sum \vec{m}_i}{V}.$$

$$\nabla\cdot\vec{P}=-\rho' \quad , \quad \nabla\times\vec{M}=\vec{J}'$$

$$\rho=\rho_0+\rho'$$

$$\Rightarrow \rho_0=\nabla\cdot\vec{E}\cdot\varepsilon_0+\nabla\cdot\vec{P}=\nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})=\nabla\cdot\vec{D}.$$

$$\vec{J}=\vec{J}_0+\vec{J}'.$$

$$\Rightarrow \vec{J}_0=\frac{\nabla\times\vec{B}}{\mu_0}-\nabla\times\vec{M}=\nabla\times\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M}\right)=\nabla\times\vec{H}.$$

$$\therefore \begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=\rho_0 \\ \nabla\times\vec{E}=0. \\ \nabla\cdot\vec{B}=0. \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_0 \end{cases}$$

③介质中变化的电场和磁场.

电磁感应定律 $\nabla\cdot\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

位移电流 $\vec{J}_D=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$. 有 $\nabla\cdot(\vec{J}_0+\vec{J}_D)=-\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{D})=0$.

$$\therefore \begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=\rho_0 \\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0. \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{D}=\varepsilon\vec{E}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} \\ \vec{B}=\mu\vec{H}.=\mu_0(\vec{H}+\vec{M}). \\ \vec{J}=\sigma\vec{E} \end{cases}$$

3.两种势与两种规范.

由 $\nabla\cdot\vec{B}=0$,我们可认为$\vec{B}$是某矢量场的旋度.

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

式中$\vec{A}$称为磁矢势，将上式代入麦氏方程组可得 $\nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$,
我们可认为 $\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$是某标量场的梯度.

$$\vec{E}=-\nabla V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

式中V称为电标势.

下面我们用这两个势来表述(真空中)麦氏方程组.

$$\nabla\cdot\vec{E} = \nabla\cdot\left(-\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = -\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

$$\nabla\times\vec{B} = \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \vec{e_i}\,\varepsilon_{ijk}\partial_j\,\varepsilon_{klm}\partial_l A_m = \vec{e_i}\,\partial_j(\partial_i A_j - \partial_j A_i)$$

$$= \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\left(-\nabla\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \left(\nabla^2\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{J} \end{cases}$$

①. 库仑规范: $\nabla\cdot\vec{A} = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{\mathscr{r}}d\tau'. \\ \nabla^2 A - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{J}. \end{cases}$$

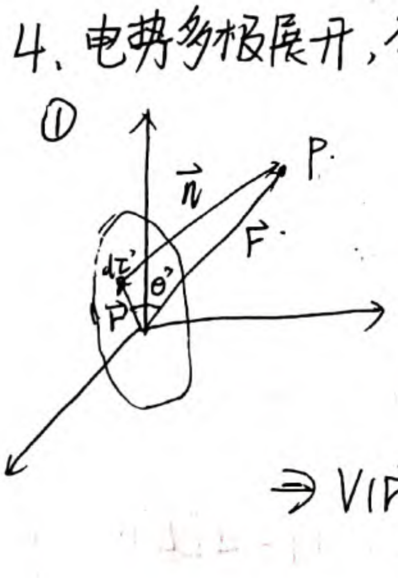
② 洛仑兹规范: $\nabla\cdot\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t} = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 V - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \\ \nabla^2\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}. \end{cases}$$

补:规范变换 $\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda \\ V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t}. \end{cases}$

4、电势多极展开,磁矢势多极展开.

①



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{\mathscr{r}}d\tau'.$$

$$\mathscr{r} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'} \approx r\left(1 - \frac{r'}{r}\cos\theta'\right).$$

$$\cancel{\frac{1}{\mathscr{r}} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r'}{r}\cos\theta'\right)}$$

$$\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta').$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\frac{\rho(\vec{r}')}{r} + \frac{\rho(\vec{r}')}{r^2}r'\cos\theta' + \cdots\right]d\tau'.$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int\rho(\vec{r}')d\tau' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int\rho(\vec{r}')\,r'\cos\theta'\,d\tau'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int\rho(\vec{r}')d\tau' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int\hat{r}\cdot d\vec{p}$$

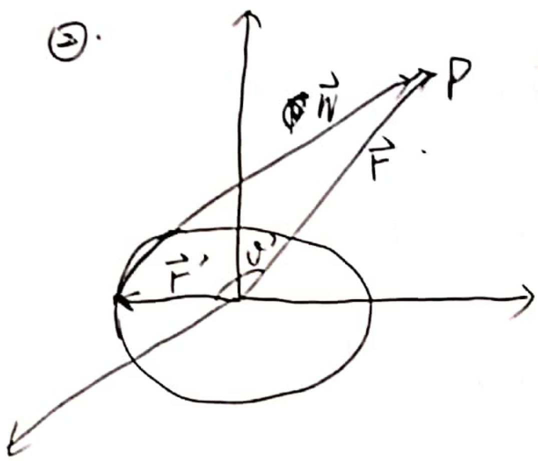
$V_1(\vec r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 电单极项.

$V_2(\vec r) = \frac{\vec p\cdot\hat r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 电偶极项. $\quad \vec p = \int_V \rho(\vec r')\vec r' \, d\tau'$

电偶极子的电场 $\vec E = -\nabla V_2(\vec r)$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[3(\vec p\cdot\hat r)\hat r - \vec p].$$

②.



$$\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec J(\vec r')}{\mathscr{r}} d\tau'.$$

$$\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta').$$

$$\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec J(\vec r')}{r} + \frac{\vec J(\vec r')}{r^2} r'\cos\theta' + \cdots\right] d\tau'$$

$$\approx \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\int \vec J(\vec r') d\tau' + \frac{1}{r^2}\int \vec J(\vec r') r'\cos\theta' d\tau'\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\int_V \vec J(\vec r') r'\cos\theta' \, d\tau' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\oint r'\cos\theta' d\vec l'$$

$\vec A_0(\vec r) = 0$, 电单极项.

$\vec A_1(\vec r) = \frac{\mu_0 \vec m\times\hat r}{4\pi r^2}$, 磁偶极项. $\quad \cancel{\vec m = \int_V \vec r'\times\vec J(\vec r') d\tau'}$

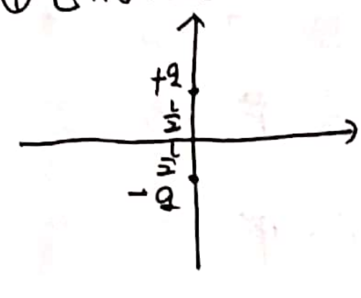
$\vec m = I\int d\vec a = I\vec a$. $\quad \cancel{= \int I d\vec a = I\vec a}$

磁偶极子的磁场 $\vec B = \nabla\times\vec A_1(\vec r)$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\vec m\cdot\hat r)\hat r - \vec m].$$

5. 电偶极子磁偶极子在外场下受的力和力矩.

①电偶极子.



$$\vec F = q\vec E(\vec r_+) - q\vec E(\vec r_-).$$

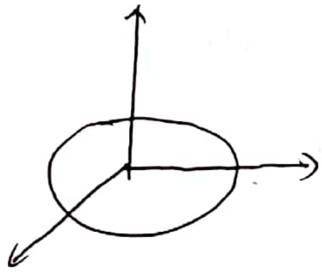
$$\vec r_+ = \vec r + \frac{l}{2}\hat l, \quad \vec r_- = \vec r - \frac{l}{2}\hat l$$

$$\Rightarrow \vec F = q[\vec E(\vec r) + (\tfrac{\vec l}{2}\cdot\nabla)\vec E(\vec r)] - q[\vec E(\vec r) - (\tfrac{\vec l}{2}\cdot\nabla)\vec E(\vec r)]$$

$$= (\vec p\cdot\nabla)\vec E$$

$$\vec{L} = \vec{r}_+ \times q\vec{E}(\vec{r}_+) - \vec{r}_- \times q\vec{E}(\vec{r}_-)$$
$$= (\vec{r}+\tfrac{\vec{l}}{2})\times q[\vec{E}(\vec{r})+(\tfrac{\vec{l}}{2}\cdot\nabla)\vec{E}(\vec{r})] - (\vec{r}-\tfrac{\vec{l}}{2})\times q[\vec{E}(\vec{r})-(\tfrac{\vec{l}}{2}\cdot\nabla)\vec{E}(\vec{r})]$$
$$= \vec{p}\times\vec{E} + \vec{r}\times\vec{F}$$

②磁偶极子



$$\vec{F} = \oint I d\vec{l}' \times \vec{B}(\vec{r}')$$
$$= \oint I d\vec{l}' \times [\vec{B}(\vec{r}_0) + (\vec{r}'-\vec{r}_0)\cdot\nabla\vec{B}(\vec{r}_0)]$$
$$= \oint I d\vec{r}' \times [(\vec{r}'\cdot\nabla_0)\vec{B}(\vec{r}_0)]$$
$$F_i = I\oint \varepsilon_{ijk} dr'_j \cdot r'_l \nabla_l B_k$$

$$\oint (\vec{c}\cdot\vec{r})d\vec{l} = \vec{a}\times\vec{c}$$
$$\Rightarrow \oint c_p r_p dl_j = -\varepsilon_{jpm} c_p a_m \Rightarrow \oint r_l dl_j = \varepsilon_{ljm} a_m$$
$$\Rightarrow F_i = I\,\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljm} a_m \nabla_l B_k = I(a_k\partial_i B_k - a_i\partial_k B_k)$$
$$\therefore \vec{F} = \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B}) - \vec{m}(\nabla\cdot\vec{B}) = \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B}).$$

$$\vec{L} = \oint \vec{r}\times d\vec{F} = \oint \vec{r}'\times I(d\vec{r}'\times\vec{B})$$
$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{e}_i\varepsilon_{ijk}A_j\varepsilon_{klm}B_lC_m = \vec{e}_iA_j(B_iC_j - B_jC_i) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$
$$\therefore \vec{r}'\times(d\vec{r}'\times\vec{B}) = (\vec{r}'\cdot\vec{B})d\vec{r}' - (\vec{r}'\cdot d\vec{r}')\vec{B}.$$
$$(\vec{r}'\times d\vec{r}')\times\vec{B} = (\vec{B}\cdot\vec{r}')d\vec{r}' - (\vec{B}\cdot d\vec{r}')\vec{r}'.$$
$$\Rightarrow \vec{r}'\times(d\vec{r}'\times\vec{B}) = \frac{1}{2}(\vec{r}'\times d\vec{r}')\times\vec{B} + \frac{1}{2}(\vec{B}\cdot\vec{r}')d\vec{r}' + \frac{1}{2}(\vec{B}\cdot d\vec{r}')\vec{r}' - (\vec{r}'\cdot d\vec{r}')\vec{B}.$$
$$\Rightarrow \vec{L} = \oint \frac{I}{2}(\vec{r}'\times d\vec{r}')\times\vec{B} + \oint \frac{I}{2}d[(\vec{B}\cdot\vec{r}')\vec{r}'] - \oint I\,d r'^2\,\vec{B}$$
$$= \vec{m}\times\vec{B}.$$

6、电场与磁场的能量.

点电荷系统的能量为 $W_e=\frac{1}{2}\sum q_i V_i$，对于体电荷系统，一个很自然的推广为（包括自能）.

$$W_e=\frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r}')V(\vec{r}')d\tau'.$$

$$=\frac{1}{2}\int_V (\nabla\cdot\vec{E})\varepsilon_0 V(\vec{r}')d\tau'$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V [\nabla\cdot(V\vec{E})-\vec{E}\cdot\nabla V]d\tau'$$

$$=\int_V \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 d\tau'=\int_V w_e d\tau'$$

式中 $w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ 为真空中电场能量密度.

对于电流环

$$\frac{dW_m}{dt}=-I\mathcal{E}=I\frac{d\Phi}{dt}=LI\frac{dI}{dt}.\Rightarrow W_m=\frac{1}{2}LI^2.$$

$$\Phi=\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a}'=\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l}'=LI$$

$$\therefore W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}I\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l}'=\frac{1}{2}\int(\vec{A}\cdot\vec{J})d\tau'$$

$$=\frac{1}{2\mu_0}\int(\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B}))d\tau'.$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\partial_i\varepsilon_{ijk}A_j B_k=\varepsilon_{ijk}A_j\partial_i B_k+\varepsilon_{ijk}B_k\partial_i A_j.$$

$$=-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}).$$

$$\Rightarrow W_m=\frac{1}{2\mu_0}\int[\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})-\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})]d\tau'$$

$$=\frac{1}{2\mu_0}\int B^2 d\tau'=\int_V w_m d\tau'$$

式中 $w_m=\frac{1}{2\mu_0}B^2$ 为真空中磁场能量密度.

7. 守恒定律.

①. 电荷守恒.

$$\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

② 能量守恒.

一个电荷~~电荷~~系统受的洛仑兹力为

$$\vec{F}=\int\rho(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})d\tau'$$

$\boxed{\text{单位体积电荷}}$ $dW = \vec{f}\cdot d\vec{l}$

$\boxed{\text{洛伦兹力做功}}$

$$= \rho(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}dt$$

$$= \rho\vec{E}\cdot\vec{v}dt$$

$$= \vec{E}\cdot\vec{J}dt$$

$$\vec{E}\cdot\vec{J} = \vec{E}\cdot\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B}) - \varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = -\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E})$$

$$\frac{dW}{dt} = \int\left(\frac{1}{\mu_0}[\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})] - \varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)d\tau$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int -\left(\frac{\varepsilon_0}{2}E^2+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)d\tau - \oint \vec{E}\times\frac{\vec{B}}{\mu_0}\,d\vec{s}.$$

洛伦兹力做功改变电荷体系的机械能.

洛伦兹力做功改变电荷体系的机械能

$$\therefore \frac{\partial W_{mech}}{\partial t} = -\frac{\partial W_{em}}{\partial t} - \nabla\cdot\vec{S}.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(W_{mech}+W_{em}) = -\nabla\cdot\vec{S}.$$

③. 动量守恒.

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}$$

$$= \varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + \left[\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B}) - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]\times\vec{B}$$

$$(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B} = -\vec{e_i}\,\varepsilon_{ijk}B_j\,\varepsilon_{klm}\partial_l B_m = -\vec{e_i}B_j(\partial_i B_j - \partial_j B_i)$$

$$= -\frac{1}{2}\nabla(B^2) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}.$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} - \frac{1}{2\mu_0}\nabla(B^2) + \frac{1}{\mu_0}(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B} - \varepsilon_0\frac{\partial(\vec{E}\times\vec{B})}{\partial t} + \varepsilon_0\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$= \varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} - \frac{1}{2\mu_0}\nabla(B^2) + \frac{1}{\mu_0}(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B} - \varepsilon_0\frac{\partial(\vec{E}\times\vec{B})}{\partial t} - \varepsilon_0\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})$$

$$\cancel{\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E}) = E_i\,\varepsilon_{ijk}\partial_j E_k = \varepsilon_{ijk}\partial_j E_i E_k - E_k\varepsilon_{ijk}\partial_j E_i}$$

$$\cancel{= -\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{E}) + \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{E})}$$

$$\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E}) = \vec{e_i}\,\varepsilon_{ijk}E_j\,\varepsilon_{klm}\partial_l E_m = \vec{e_i}E_j(\partial_i E_j - \partial_j E_i) = \frac{\nabla(E^2)}{2} - (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{f} = -\nabla\left(\frac{B^2}{2\mu_0}+\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right) + \left[\frac{1}{\mu_0}(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B} + \varepsilon_0(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}\right] + \left[\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B}\right] - \varepsilon_0\frac{\partial(\vec{E}\times\vec{B})}{\partial t}$$

定义麦克斯韦应力张量

$$T_{ij}=\varepsilon_0\left[E_iE_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right]+\frac{1}{\mu_0}\left[B_iB_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right]$$

$$T_{xx}=\frac{\varepsilon_0}{2}(E_x^2-E_y^2-E_z^2)+\frac{1}{2\mu_0}(B_x^2-B_y^2-B_z^2).$$

$$T_{xy}=\varepsilon_0E_xE_y+\frac{1}{\mu_0}B_xB_y.$$

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}=\sum_i\partial_iT_{ij}$$

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}_x=\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial x}(E_x^2-E_y^2-E_z^2)+\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}(B_x^2-B_y^2-B_z^2)$$

$$+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial y}(E_xE_y)+\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial y}(B_xB_y)$$

$$+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial z}(E_xE_z)+\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}(B_xB_z).$$

$$=-\nabla\left(\frac{B^2}{2\mu_0}+\frac{\varepsilon_0E^2}{2}\right)_x+\left[\frac{1}{\mu_0}(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}+\varepsilon_0(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}\right]_x$$

$$+\left[\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B}\right]_x.$$

$$\Rightarrow\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}=\vec{f}+\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\mu_0}\frac{\partial(\vec{E}\times\vec{B})}{\partial t}.=\vec{f}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{S}}{\partial t}.$$

$$\vec{f}=\frac{d\vec{\wp}_{mech}}{dt}$$ (牛二定律).

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}(\vec{\wp}_{mech}+\vec{\wp}_{em})=\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}$$

$\vec{\wp}_{em}\equiv\varepsilon_0\mu_0\vec{S}=\vec{D}\times\vec{B}$ 为电磁场的动量密度.

8、真空中电磁波.

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\;0\\\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\\nabla\cdot\vec{B}=0\\\nabla\times\vec{B}=\cancel{\mu_0\vec{J}}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=-\frac{\partial(\nabla\times\vec{B})}{\partial t}.$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}$$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

$$\Rightarrow\nabla^2\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0.$$

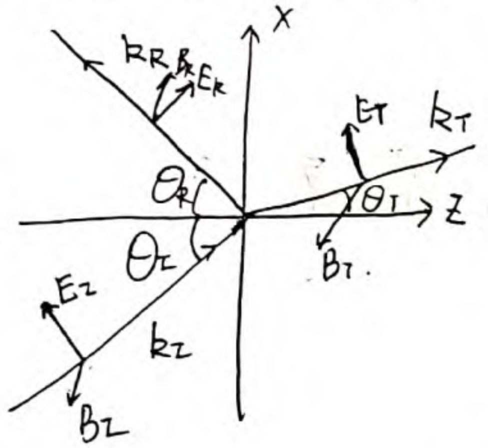
同理 $\nabla^2\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0.$

$$\begin{cases} \tilde{E} = \tilde{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ \tilde{B} = \tilde{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = \frac{\hat{k}}{c} \times \tilde{E} \end{cases}$$

~~$k = \omega c$~~

$\omega = ck$.

9、介质中反射与折射.



$$\begin{cases} \tilde{E}_I = \tilde{E}_{I0} e^{i(\vec{k}_I\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ \tilde{B}_I = \tilde{B}_{I0} e^{i(\vec{k}_I\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ \tilde{E}_R = \tilde{E}_{R0} e^{i(\vec{k}_R\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ \tilde{B}_R = \tilde{B}_{R0} e^{i(\vec{k}_R\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ \tilde{E}_T = \tilde{E}_{T0} e^{i(\vec{k}_T\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ \tilde{B}_T = \tilde{B}_{T0} e^{i(\vec{k}_T\cdot\vec{r} - \omega t)} \end{cases}$$

边界条件: $(\ \ \ ) e^{i(\vec{k}_I\cdot\vec{r} - \omega t)}\Big|_{z=0} + (\ \ \ ) e^{i(\vec{k}_R\cdot\vec{r} - \omega t)}\Big|_{z=0} = (\ \ \ ) e^{i(\vec{k}_T\cdot\vec{r} - \omega t)}\Big|_{z=0}$

$$\Rightarrow \vec{k}_I\cdot\vec{r}\big|_{z=0} = \vec{k}_R\cdot\vec{r}\big|_{z=0} = \vec{k}_T\cdot\vec{r}\big|_{z=0}.$$

即 $(k_I)_x x + (k_I)_y y = (k_R)_x x + (k_R)_y y = (k_T)_x x + (k_T)_y y$.

$\Rightarrow (k_I)_x = (k_R)_x = (k_T)_x$, $(k_I)_y = (k_R)_y = (k_T)_y$

且 $k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 = \omega \Rightarrow k_I = k_I = k_T \frac{v_2}{v_1}$.

选取合适坐标系使 $(k_I)_y = 0$.

① $(k_I)_x = (k_R)_x \Rightarrow k_I \sin\theta_I = k_R \sin\theta_R \Rightarrow \theta_I = \theta_R$.

② $(k_I)_x = (k_T)_x \Rightarrow k_I \sin\theta_I = k_T \sin\theta_T \Rightarrow \frac{\sin\theta_I}{\sin\theta_T} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$

这里有一个问题: ~~假设~~选取适当坐标系使 E_I 位于 x-z 平面内，为什么反射与折射波的电场分量仍位于于 x-z 平面内？

答: 可(以)考虑垂直入射的情形，设反射波，折射波电场与X轴夹角 θ_R 与 θ_T，可由边界条件解出 $\theta_R = \theta_T = 0$。对于斜入射情形，将波矢分为垂直介面与平行介面两部分，由于这两部分 E_R 与 E_T 都无 y 方向分量，所以反射折射波的电场仍位于x-z平

由边界条件可解出

$$\tilde{E}_{0R}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\tilde{E}_{0I}\ ,\ \tilde{E}_{0T}=\frac{2}{\alpha+\beta}\tilde{E}_{0I}$$

式中 $\alpha\equiv\frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I}$ ，$\beta=\frac{v_1\mu_1}{v_2\mu_2}$

波的强度 $I=\frac{1}{2}\varepsilon vE_0^2$.

10.波导中电磁导.

波导管中电磁波不是横电磁波.

若 $B_z=B_0\cos(m\pi x/a)\cos(n\pi y/b)$，称为 TE_{mn} 模式.

11.推迟势和杰斐缅柯方程.

考虑到电磁波在真空中以光速 c 传播，势函数表达式一个自然的推广为

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}',t_r)}{\imath}d\tau'$$

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}',t_r)}{\imath}d\tau'$$

$$t_r\equiv t-\frac{\imath}{c}.$$

$$\nabla\times\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\left(\frac{1}{\imath}\right)\times\vec{J}+\frac{1}{\imath}\nabla\times\vec{J}\,d\tau'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\frac{-\hat{\imath}}{\imath^2}\right)\times\vec{J}+\frac{1}{\imath}\left(-\frac{1}{c}\hat{\imath}\right)\times\dot{\vec{J}}d\tau'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{J}\times\hat{\imath}}{\imath^2}+\frac{\dot{\vec{J}}\times\hat{\imath}}{c\imath}\right]d\tau'$$

$$\nabla V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\nabla\left(\frac{1}{\imath}\right)\rho+\frac{1}{\imath}\nabla\rho\right]d\tau'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left(\frac{-\hat{\imath}}{\imath^2}\rho+\frac{1}{\imath}\dot{\rho}\left(-\frac{\hat{\imath}}{c}\right)\right)d\tau'$$

$$=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left(\frac{\rho\hat{\imath}}{\imath^2}+\frac{\dot{\rho}\hat{\imath}}{c\imath}\right)d\tau'$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \left(\frac{\rho\hat{\eta}}{\eta^2} + \frac{\dot{\rho}\hat{\eta}}{c\eta}\right) d\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{\eta} d\tau'$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \left(\frac{\vec{J}\times\hat{\eta}}{\eta^2} + \frac{\dot{\vec{J}}\times\hat{\eta}}{c\eta}\right) d\tau'.$$

12. 点电荷的李纳-维谢尔势

这是一个纯几何效应

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q/(1-\hat{\eta}\cdot\vec{v}/c)}{\eta} = \frac{qc}{\eta c - \vec{\eta}\cdot\vec{v}} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qc\vec{v}}{\eta c - \vec{\eta}\cdot\vec{v}}.$$

补. 1. Kronecker 符号 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, 若 i=j \\ 0, 若 i\neq j \end{cases}$

Levi-Civita 张量 ε_{ijk}.

2. incident：入射的

reflective：反射的

transmitted：透射的.

13. Maxwell方程组的时间与空间反演对称性.

Maxwell方程组
$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=\rho_0 & ① \\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & ② \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 & ③ \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} & ④ \end{cases}$$

设 P为空间反演算符, Ⓣ为时间反演算符

$P f(\vec{r})=f(-\vec{r})$, Ⓣ$g(t)=g(-t)$.

电场与磁感应强度表达式:

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho\vec{r}}{r^3}d\tau'$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_L\frac{I\,d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

将算符 P作用到电场和磁感应强度上,我们可得

$$P\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(-\vec{r})}{r^3}d\tau'=-\vec{E}$$

$$P\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_L\frac{I(-d\vec{l})\times(-\vec{r})}{r^3}=\vec{B}$$

所以 $\vec{B}$具有空间反演对称性, $\vec{E}$具有反对称性. 将P作用到$\vec{J}$上得$P\vec{J}=-\vec{J}$

同样,将算符 Ⓣ作用到电场和磁感应强度上,我们可得.

$$Ⓣ\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho\vec{r}}{r^3}d\tau'=\vec{E}$$

$$Ⓣ\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_L\frac{-I\,d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}=-\vec{B}$$

将 Ⓣ作用到$\vec{J}$上并代入$\vec{J}$表达式 $\vec{J}=nq\vec{v}$得

$$Ⓣ\vec{J}=nq\frac{d\vec{r}}{d(-t)}=-nq\frac{d\vec{r}}{dt}=-\vec{J}$$

∴ P作用于Maxwell方程组上可得

$$P(\nabla\cdot\vec{D})=-\nabla\cdot(-\vec{D})=\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0=P(\rho_0)$$

$$P(\nabla\times\vec{E})=-\nabla\times(-\vec{E})=\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}P(\vec{B})$$

$$P(\nabla\cdot\vec{B})=-\nabla\cdot\vec{B}=0=P(0).$$

$$P(\nabla\times\vec{H})=-\nabla\times\vec{H}=-\vec{J}_0-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=P\vec{J}_0+P\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=P(\vec{J}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}).$$

Θ 作用于Maxwell方程组可得

$$\Theta(\nabla\cdot\vec{D}) = \nabla\cdot\vec{D} = \rho_0 = \Theta(\rho_0).$$

$$\Theta(\nabla\times\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\left(-\Theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)(-\Theta(\vec{B})) = -\Theta\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right).$$

$$\Theta(\nabla\cdot\vec{B}) = \nabla\cdot(-\vec{B}) = 0 = \Theta(0)$$

$$\Theta(\nabla\times\vec{B}) = -\nabla\times\vec{B} = -\vec{J}_0 - \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \Theta(\vec{J}_0) + \Theta\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) = \Theta\left(\vec{J}_0 + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right).$$

$\Rightarrow$ Maxwell方程组具有时间和空间反演对称性.

14. 任意源的辐射.

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}',t-\frac{\eta}{c})}{\eta}d\tau'$$

$$A(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}',t-\frac{\eta}{c})}{\eta}d\tau'$$

$$\eta = \sqrt{r^2+r'^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}'} \approx r\left(1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)$$

$$\frac{1}{\eta} \approx \frac{1}{r}\left(1+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)$$

$$\rho(\vec{r}',t-\frac{\eta}{c}) = \rho(\vec{r}',t_0) + \dot{\rho}(\vec{r}',t_0)\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{rc}\right) + \cdots$$

式中 $t_0 \equiv t - \frac{r}{c}$.

$$\Rightarrow V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\frac{\rho(\vec{r}',t_0)}{r} + \frac{\hat{r}\cdot\vec{r}'}{rc}\dot{\rho}(\vec{r}',t_0) + \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\vec{r}'\rho(\vec{r}',t_0)\right]d\tau'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{\hat{r}\cdot\vec{p}(t_0)}{r^2} + \frac{\hat{r}\cdot\dot{\vec{p}}(t_0)}{rc}\right)$$

$\cancel{\vec{J}(\vec{r}',t-\frac{\eta}{c}) \approx \vec{J}(\vec{r}',t_0)}$

$$A(\vec{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r}\int\vec{J}(\vec{r}',t-\frac{\eta}{c})d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}(t_0).$$

只考虑 E和B 正比于 $\frac{1}{r}$ 的部分.

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi r}[\hat{r}\times(\hat{r}\times\ddot{\vec{p}})].$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi rc}[\hat{r}\times\ddot{\vec{p}}].$$

15、带电粒子在电磁场中的哈密顿量.

$\vec{F} = q(\vec{v}\times\vec{B}+\vec{E})$ 为带电粒子在电磁场中受的洛伦兹力.

代入 $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$，$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{e_i}\,\varepsilon_{ijk}A_j\,\varepsilon_{klm}B_lC_m = \vec{e_i}A_j(B_iC_j - B_jC_i)$

$\therefore \vec{v}\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$.

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q[\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A} - \nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}]$.

$= q[\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}-\phi) - (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}]$

$\frac{d(\vec{p}+q\vec{A})}{dt} = q\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}-\phi)$ ~~$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$~~ 注: $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{A}$.

$\frac{d(\vec{p}+q\vec{A})}{dt} = q\nabla(\vec{\eta}\cdot\vec{A}^{(4)})$

其中 $\vec{\eta} = (\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}})$ 为4速度矢量，$\vec{A}^{(4)} = (\vec{A}, \frac{i\phi}{c})$ 为4势能矢量.

~~[illegible]~~ 把运动方程写成拉格朗日方程 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}$ 的形式.

$L = q(\vec{v}\cdot\vec{A}-\phi) + a(\vec{v})$

$\frac{\partial L}{\partial v_i} = p_i + qA_i = qA_i + \frac{\partial a}{\partial v_i}$

若使 $\frac{\partial a}{\partial v_i} = p_i = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v_i \Rightarrow a(\vec{v}) = m_0c^2(1-\frac{1}{\gamma})$.

$\Rightarrow L = q(\vec{v}\cdot\vec{A}-\phi) + m_0c^2(1-\frac{1}{\gamma})$.

广义动量 $\vec{P} = \vec{p} + q\vec{A}$

哈密顿量 $H = \vec{P}\cdot\vec{v} - L = \gamma m_0v^2 + q\vec{A}\cdot\vec{v} - q\vec{v}\cdot\vec{A} + q\phi - m_0c^2(1-\frac{1}{\gamma})$.

$= \gamma m_0v^2 + q\phi - m_0c^2 + \frac{m_0c^2}{\gamma}$

$= m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1) + q\phi$.

$\approx \frac{m_0v^2}{2} + q\phi$

$\approx \frac{(\vec{P}-q\vec{A})^2}{2m} + q\phi$.

3

相对论

3.1 Michelson-Morley 实验

3.2 相对论的两个假设

3.3 Minkowski 几何表象何因果关系

3.4 相对论中遇到的四矢量

3.5 Lorentz 变换的导出

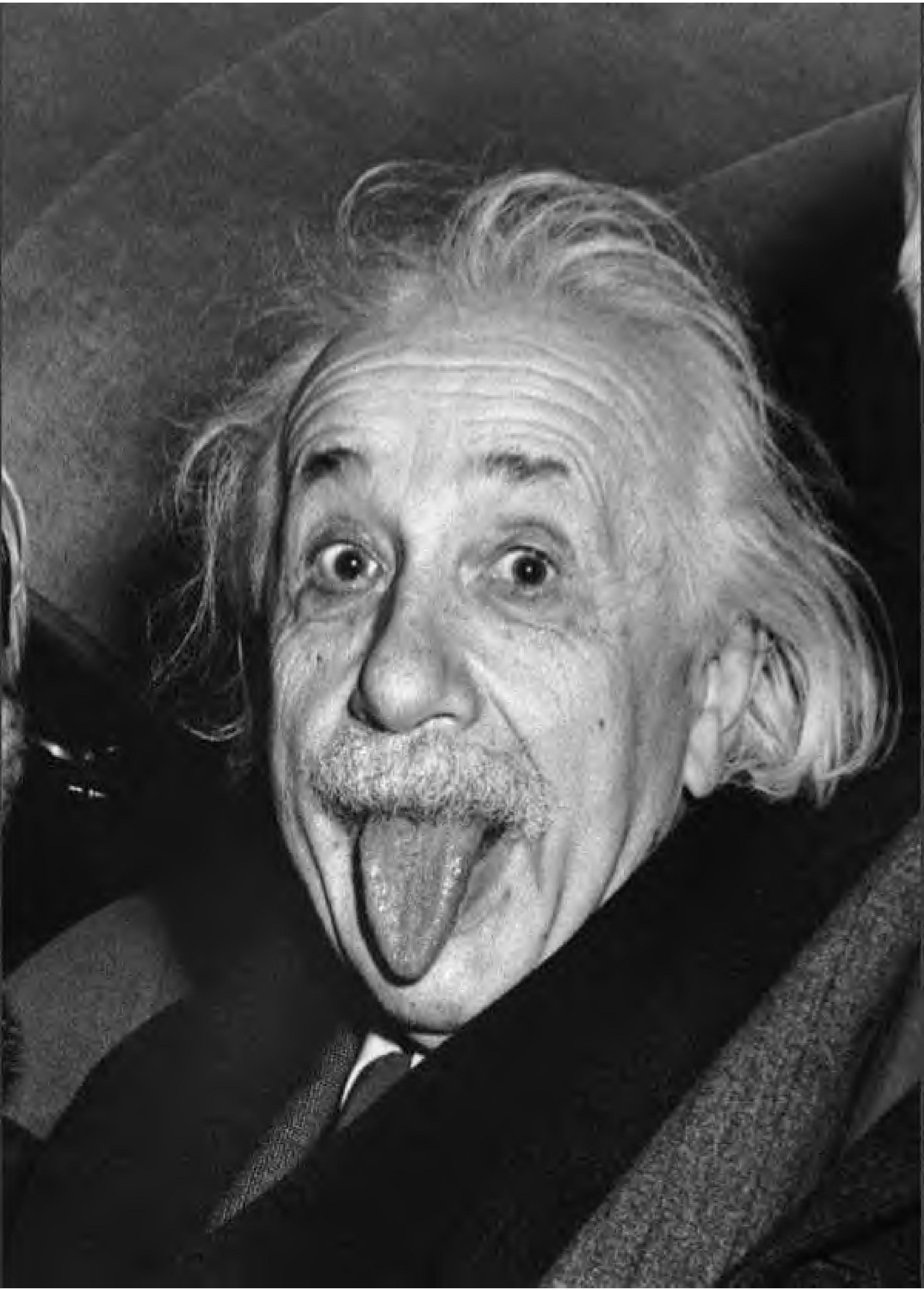
3.6 Lorentz 变换的结果

3.7 Lorentz 变换的矩阵形式

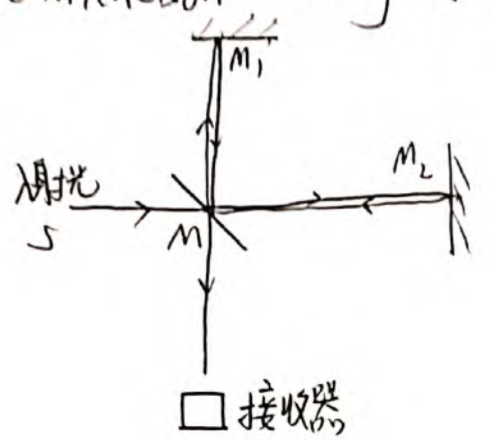
3.8 电磁场张量，对偶张量及电磁场的 Lorentz 变换

3.9 Maxwell 方程组的张量形式

3.10 质能关系



① Michelson－Morley实验



如果光是相对于一个绝对静止系(以太系)运动的话，使SMM_2沿着地球轨道速度之方向，MM_1与M_2M长度相等，且相互垂直，则接收器收到来自M_1与M_2的两束光的时间差为 $\Delta t=\left(\frac{L}{c+v}+\frac{L}{c-v}\right)-\frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}}=\beta^2\frac{L}{c}$，相位差 $\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta t=\frac{2\pi L}{\lambda c}\beta^2$。将整个装置旋转90度，两束光的地位将会发生互换，这会体现在接收器处干涉条纹的移动，但是实验确没有观察到条纹移动现象。

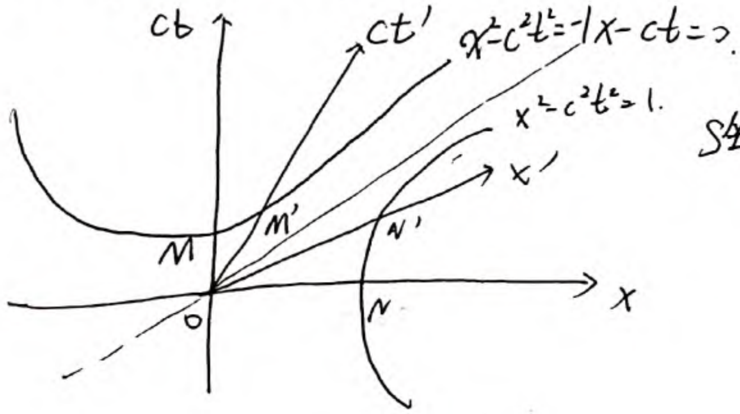
这一实验证明了不存在一个绝对静止系。

② 相对论的两个假设

光速不变原理：光速在所有惯性系中均相同。

相对性原理：~~所有~~任何物理定律，在所有惯性系中，皆有同一的形式。

③ Minkowski几何表象和因果关系。



ct'轴在S坐标系下的方程为 $x=\beta ct$

x'轴在S坐标系下的方程为 $x=\frac{1}{\beta}ct$

S坐标系：$M(0,1)$，$N(1,0)$

$$\begin{cases}x^2-c^2t^2=-1\\ x=\beta ct\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ct=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ x=\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-c^2t^2=1\\ x=\frac{1}{\beta}ct\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ ct=\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{cases}$$

$\therefore M'\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$，$N'\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$。

设 $\begin{cases}x=\lambda x'+\mu ct'\\ ct=\alpha x'+\beta ct'\end{cases}$

~~设 $x'=\lambda x+\mu ct$，$ct'=\alpha x+\beta ct$~~

，OM, ON, OM', ON' 分别为ct轴，x轴，ct'轴，x'轴上的单位。

有 $\begin{cases}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=\mu\\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\lambda\\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\beta\\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ ct=\frac{ct'+\beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{cases}$ (Lorentz变换)

若在S系中有两事项 $P_1(x_1,t_1)$，$P_2(x_2,t_2)$，讯息由x_1传递至x_2，其传递速度为u，即 $t_2-t_1>0$，$x_2-x_1=u(t_2-t_1)$，则在~~S系中~~相对于S系以v运动的S'系中，

$$t_2'-t_1'=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[(t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)\right]=\frac{1-\frac{u\beta}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}(t_2-t_1)$$

如果$u>c$，那么一定能找到一个参考系S'，使$t_2'<t_1'$，即S'系与S系中此事项的因果关系~~颠倒~~倒置，这是不符合逻辑的。所以$u<c$是因果关系限制的。

④相对论中遇到的四矢量

四位矢 $\vec{r}=(x,y,z,ict)$

四速度 $\frac{d\vec{r}}{d\tau}=\frac{d\vec{r}}{\sqrt{1-\beta^2}dt}=\left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{v_z}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$

四电流 $\vec{J}=\rho\vec{v}=(\rho v_x,\rho v_y,\rho v_z,ic\rho)$，$\rho=\rho_0/\sqrt{1-\beta^2}$

四电位 $\vec{A}=(A_x,A_y,A_z,\frac{i\varphi}{c})$

Lorentz力 $\vec{f}=(\rho(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}),\frac{i}{c}\vec{v}\cdot\vec{f})$

四维力 $\vec{F}=m\frac{d\vec{u}}{d\tau}$

能-动量向量 $\vec{p}=(p_x,p_y,p_z,\frac{iE}{c})=m_0\vec{u}$

⑤ Lorentz变换的导出

考虑两个惯性参考系S,S'，它们的OX、OX'轴重合，Oy,Oy'轴和Oz,Oz'轴分别平行。两参考系以速度v沿着x轴方向做相对运动，设当O,O'重合时作为计时原点，两坐标系分别开始计时。由相对性原理，在两坐标系内部光的传播定律相同，即

S系：$x\pm ct=0$

S'系：$x'\pm ct'=0$

这里我们做一个假设：两坐标系中对同一物理现象的描述具有一一对应关系，最简单的情形是二者之间的变换为线性关系，即

$$\begin{cases}x=ax'+bct'\\ ct=dx'+ect'\end{cases}\qquad a=e,\ b=d \qquad \begin{cases}x'=\dfrac{-ex+bct}{bd-ae}=\dfrac{-ex+bct}{b^2-e^2}\\[2ex] ct'=\dfrac{dx-act}{bd-ae}=\dfrac{bx-ect}{b^2-e^2}\end{cases}$$

S'系的原点在S系中对应的坐标为$x'=0$，则有

$$\frac{x}{ct}=\frac{b}{e}$$

由于S'系相对于S系运动速度为v，所以S'系原点在S系中运动方程为$x=vt$，因此

$$\frac{b}{e}=\beta$$

在S'系中一个静止的长度为$\Delta x'=1$的杆，在S系中长度

$$\Delta X=\frac{b^2-e^2}{-e}$$

同理，在S系中一个静止的长度为$\Delta x=1$的杆，在S'系中长度

$$\Delta x'=\frac{1}{e}$$

由 $\begin{cases} b^2-e^2=-1 \\ \frac{b}{e}=\beta \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} b=d=\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ e=a=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ ct=\frac{ct'+\beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$ $\begin{cases} x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ ct'=\frac{ct-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$

⑥ Lorentz变换的结果.

i) 时钟变缓效应.

S'系中同一位置的两事项的时间距 $\Delta t'$，对应 S系中时间距

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ii) 尺短效应.

S'系中同一时刻测得长度 $\Delta x'=L$，对应S系中测得长度

$$\Delta x=\sqrt{1-\beta^2}\,\Delta x'.$$

iii) Doppler效应.

S'系中有一个频率 ν' 的周期现象，发生于 x_1'点，经过一周期 T'，S中看到 x_1'点从 x_1 运行到 x_2.

$$x_2-x_1=v(t_2-t_1)=\frac{vT'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

$$T=\frac{T'}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{x_2-x_1}{c}=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,T'$$

$$\nu=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\nu'.$$

iv) 速度之和.

$$\begin{cases} u_x=\frac{dx}{dt}=\frac{dx'+v\,dt'}{\frac{\beta}{c}dx'+dt'}=\frac{u_x'+v}{1+\beta\frac{u_x'}{c}}. \\ u_y=\frac{u_y'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\frac{u_x'}{c}} \\ u_z=\frac{dz}{dt}=\frac{dz'\sqrt{1-\beta^2}}{dt'+\frac{\beta}{c}dx'}=\frac{u_z'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{\beta}{c}u_x'} \end{cases}$$

⑦. Lorentz变换的矩阵形式

$$a=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix} \qquad a^T=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\cancel{aa^T = \gamma^2 \quad \beta^2\gamma^2 + 1 + 1 + 1 = \beta^2\gamma^2 + \gamma^2}$$

$$aa^T = I$$

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}, \quad x'=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}$$

$$x' = a^T x, \quad x = a x'.$$

⑧电磁场张量,对偶张量,及电磁场的Lorentz变换

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \qquad \vec{A} = (A_x, A_y, A_z, \frac{i\phi}{c}).$$

$$\nabla\times\vec{A}^{(3)} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

$$F_{ii} = 0 \quad (i=1,2,3,4)$$

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = B_z, \quad F_{13} = \frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3} = -B_y$$

$$F_{14} = \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} = \frac{i}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{1}{ic}\frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{-i}{c}E_x$$

$$F_{23} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = B_x, \quad F_{24} = \frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} = \frac{-i}{c}E_y$$

$$F_{34} = \frac{-i}{c}E_z, \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}.$$

$$\Rightarrow F=\begin{pmatrix}0 & B_z & -B_y & \frac{-i}{c}E_x\\ -B_z & 0 & B_x & \frac{-i}{c}E_y\\ B_y & -B_x & 0 & \frac{-i}{c}E_z\\ \frac{i}{c}E_x & \frac{i}{c}E_y & \frac{i}{c}E_z & 0\end{pmatrix}$$

张量 $F^*_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}/2$

$F^*_{12} = F_{34}$, $F^*_{13} = -F_{24}$, $F^*_{14} = F_{23}$

$F^*_{23} = F_{14}$, $F^*_{24} = -F_{13}$, $F^*_{34} = F_{12}$

$$F^*=\begin{pmatrix}0 & \frac{-i}{c}E_z & \frac{i}{c}E_y & B_x\\ \frac{i}{c}E_z & 0 & \frac{-i}{c}E_x & B_y\\ \frac{-i}{c}E_y & \frac{i}{c}E_x & 0 & B_z\\ -B_x & -B_y & -B_z & 0\end{pmatrix}$$

对偶张量 $G = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}F$

$$=\begin{pmatrix}0 & \frac{H_z}{c} & \frac{-H_y}{c} & -iD_x\\ -\frac{H_z}{c} & 0 & \frac{H_x}{c} & -iD_y\\ \frac{H_y}{c} & \frac{-H_x}{c} & 0 & -iD_z\\ iD_x & iD_y & iD_z & 0\end{pmatrix}$$

$$x^T F x = x'^T F' x' = x'^T a^T F a x'$$

$$\Rightarrow F' = a^T F a$$

即

$$\begin{pmatrix} 0 & B_z' & -B_y' & -\frac{i}{c}E_x' \\ -B_z' & 0 & B_x' & -\frac{i}{c}E_y' \\ B_y' & -B_x' & 0 & -\frac{i}{c}E_z' \\ \frac{i}{c}E_x' & \frac{i}{c}E_y' & \frac{i}{c}E_z' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c}E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c}E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c}E_z \\ \frac{i}{c}E_x & \frac{i}{c}E_y & \frac{i}{c}E_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\beta\gamma}{c}E_x & \gamma B_z - \frac{\beta\gamma}{c}E_y & -\gamma B_y - \frac{\beta\gamma}{c}E_z & -\frac{i\gamma}{c}E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c}E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c}E_z \\ \frac{i\gamma}{c}E_x & -i\beta\gamma B_z + \frac{i\gamma}{c}E_y & +i\beta\gamma B_y + \frac{i\gamma}{c}E_z & -\frac{\beta\gamma}{c}E_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\beta\gamma^2}{c}E_x + \frac{\beta\gamma^2}{c}E_x & \gamma B_z - \frac{\beta\gamma}{c}E_y & -\gamma B_y - \frac{\beta\gamma}{c}E_z & \frac{i\beta^2\gamma^2}{c}E_x - \frac{i\gamma^2}{c}E_x \\ -\gamma B_z + \frac{\beta\gamma}{c}E_y & 0 & B_x & +i\beta\gamma B_z - \frac{i}{c}\gamma E_y \\ \gamma B_y + \frac{\beta\gamma}{c}E_z & -B_x & 0 & -i\beta\gamma B_y - \frac{i\gamma}{c}E_z \\ -\frac{i\gamma^2\beta^2}{c}E_x + \frac{i\gamma^2}{c}E_x & -i\beta\gamma B_z + \frac{i}{c}\gamma E_y & +i\beta\gamma B_y + \frac{i\gamma}{c}E_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \gamma B_z - \frac{\beta\gamma}{c}E_y & -\gamma B_y - \frac{\beta\gamma}{c}E_z & -\frac{i}{c}E_x \\ -\gamma B_z + \frac{\beta\gamma}{c}E_y & 0 & B_x & +i\beta\gamma B_z - \frac{i}{c}\gamma E_y \\ \gamma B_y + \frac{\beta\gamma}{c}E_z & -B_x & 0 & -i\beta\gamma B_y - \frac{i\gamma}{c}E_z \\ \frac{i}{c}E_x & -i\beta\gamma B_z + \frac{i}{c}\gamma E_y & +i\beta\gamma B_y + \frac{i\gamma}{c}E_z & 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} E_x' = E_x \\ E_y' = \dfrac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ E_z' = \dfrac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ B_x' = B_x \\ B_y' = \dfrac{B_y + \frac{\beta}{c}E_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ B_z' = \dfrac{B_z - \frac{\beta}{c}E_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

这就是电磁场的Lorentz变换.

⑨. Maxwell方程组张量形式

$$\frac{\partial F^*_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=0$$

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=0.$$

⑩. 质能关系

四维力 $\vec{F}=m_0\frac{d\vec{u}}{d\tau}$

定义 $\vec{K}(K_x,K_y,K_z)=\sqrt{1-\beta^2}\ \vec{F}(F_1,F_2,F_3)$.

$$\vec{F}\cdot\vec{u}=F_x u_x+F_y u_y+F_z u_z+F_4 u_4.$$

$$=\frac{m_0}{2}\frac{d}{d\tau}(\vec{u}\cdot\vec{u})=\frac{m_0}{2}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{1-\beta^2}+\frac{(-c^2)}{1-\beta^2}\right)$$

$$=\frac{m_0}{2}\frac{d}{d\tau}(-c^2)$$

$$=0$$

即 $\frac{\vec{K}\cdot\vec{v}}{1-\beta^2}+\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m_0 ic}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}=0.\iff\frac{d}{dt}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=\vec{K}\cdot\vec{v}$

$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 解释为体系的动能. 设

$$T=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+C.$$

若 $v=0, T=0\Rightarrow C=-m_0c^2\Rightarrow T=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)=(m-m_0)c^2$

式中 $m\equiv\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\vec{K}=\sqrt{1-\beta^2}\,m_0\frac{d\vec{u}^{(3)}}{d\tau}=\frac{d}{dt}\left(m_0\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$\Rightarrow\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\vec{K}}{m}-\frac{(\vec{K}\cdot\vec{v})}{mc^2}\vec{v}$ （Newton运动方程式）.

能动量向量 $\vec{P}=\vec{u}m_0=\left(\frac{m_0v_x}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{m_0v_y}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{m_0v_z}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{iE}{c}\right)$

式中 $E\equiv mc^2=T+m_0c^2$.

$\vec{P}\cdot\vec{P}=m^2v^2-\frac{E^2}{c^2}=\text{const}$. 令 $\vec{v}=0$, $\text{const}=-\frac{m_0^2c^4}{c^2}=-m_0^2c^2$

$\therefore p^2-\frac{E^2}{c^2}=-m_0^2c^2.$

4
热力学

1、热力学第一定律

$$\Delta U = Q + W$$

第一类永动机（不从外界吸收能量而一直向外做功）是不可能制成的.

2、理想气体与实际气体

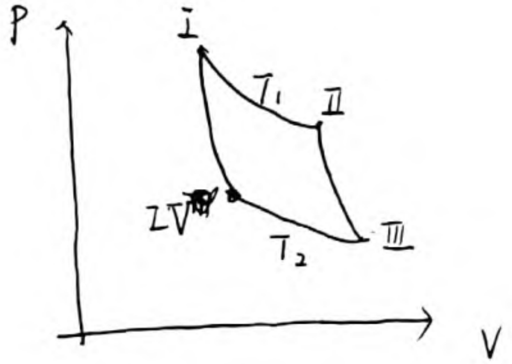
理想气体：满足理想气体公式 $PV=nRT$ 的气体

实际气体公式 $P = \frac{nRT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$

$\frac{a}{V^2}$：代表气体分子间吸引力的影响（$\propto$ 器分子数 × 容器内分子数 $\propto \rho^2 \propto \frac{1}{V^2}$）

$V-b$：代表分子体积的影响（分子越大越容易撞到边界）

3、卡诺循环与空调原理



I → II：等温膨胀. $PV=nRT_1$

$$W_1 = \int P\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V}\,dV = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$Q_1 = W_1 = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$$

II → III：绝热膨胀. $PV^{\gamma} = C$

$$W_2 = \int P\,dV = \int_{V_2}^{V_3} \frac{C}{V^{\gamma}}\,dV = \frac{-C}{\gamma-1}\left(\frac{1}{V_3^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_2^{\gamma-1}}\right) = \frac{1}{\gamma-1}\left(P_2V_2 - P_3V_3\right) = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1-T_2)$$

$Q_2 = 0.$

III → IV：等温压缩

$W_3 = -nRT_2 \ln\frac{V_3}{V_4}$

$Q_3 = -nRT_2 \ln V_3/V_4$

IV → I：绝热压缩

$W_4 = \frac{1}{\gamma-1}(P_4V_4 - P_1V_1) = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2-T_1).$

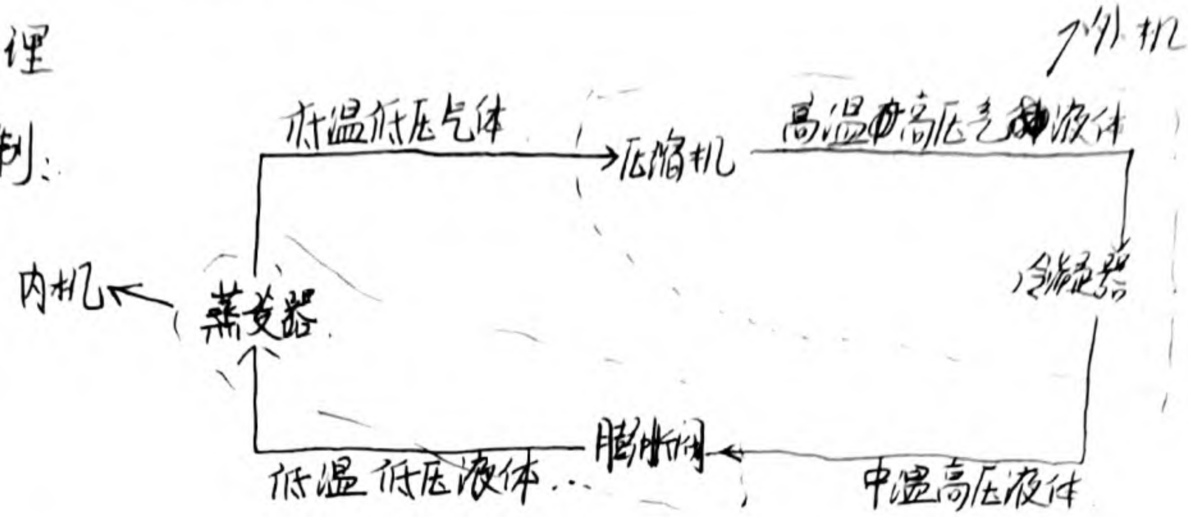
$Q_4 = 0.$

总过程吸热 $Q_{吸} = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$，放热 $Q_{放} = nRT_2 \ln\frac{V_3}{V_4}$ 做功 $W = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} - nRT_2 \ln\frac{V_3}{V_4}$

又 $V_2/V_1 = V_3/V_4$ ⇒ 效率 $\eta = \frac{W}{Q_{吸}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$

注：空调原理

制冷机制：



4. 热力学第二定律

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

dS是全微分.

第二类永动机（只从单一热源吸收热量并把它全部转化为功）是不可能制成的.

5. 麦氏关系式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

记法：S,p,T,V，若S与p在等式同一侧，则添个负号.

6. 膨胀系数，压缩系数，压强系数

膨胀系数：$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$

压缩系数：$\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$

压强系数：$\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$

7、热辐射的热力学

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial W}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

下面先证. $p = \frac{1}{3}u$（u为电磁场能量密度）

证明: $\frac{\partial}{\partial t}(\vec{p}_{em} + \vec{p}_{mech}) = \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}$

$$\because \frac{\partial}{\partial t}\iiint \vec{p}_{em}\, dV = \vec{F} = \oint \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{S}$$

由于 $\vec{F} = \oint \vec{P} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \overleftrightarrow{T}$ 对应的为动量的值.

由于电磁场各向同性. $\therefore p = |T_{xx}| = \frac{1}{3}u$.

$$\therefore u = T \cdot \frac{1}{3}\frac{du}{dT} - \frac{1}{3}u \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{4dT}{T} \Rightarrow u = aT^4.$$

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + p\,dV}{T} \cancel{= \frac{V3aT^3dT + \frac{1}{3}aT^4dV}{T} = 3aVT^2dT + \frac{1}{3}aT^3dV}$$

$$= \frac{d(VaT^4) + \frac{1}{3}aT^4 dV}{T} = 4VaT^2 dT + \frac{4}{3}aT^3 dV.$$

$$= d\left(\frac{4}{3}aT^3V\right).$$

$$\therefore S = \frac{4}{3}aT^3V.$$

单位时间从单位立体角射出来的能量.

$$dJ = uc A \cos\theta \frac{d\Omega}{4\pi}.$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} uc A \cos\theta \frac{2\pi \sin\theta}{4\pi} d\theta$$

$$= \frac{ucA}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{ucA}{4}$$

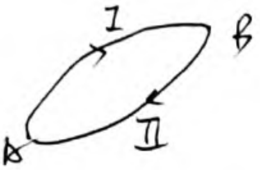
$$= \frac{cA}{4} aT^4$$

$$= \sigma T^4.$$（玻尔兹曼定律）.

8、热动平衡条件

不可逆过程 $1-\frac{Q_2}{Q_1} \le 1-\frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2} \le 0$ ($Q<0$表示放热)

即 $\int \frac{dQ}{T} \le 0$.



$A \to B$. I可逆. II不可逆.

$$\oint \frac{dQ}{T} \le 0 \Rightarrow \int_A^B \frac{dQ}{T} + \int_B^A \frac{dQ}{T} \le 0$$

$$\therefore \int_B^A \frac{dQ}{T} \le S_A - S_B.$$

若为绝热过程. $dQ=0 \Rightarrow \Delta S \geq 0$. 同理 $\Delta F \le 0$, $\Delta G \le 0$

9、三大平衡

热平衡 $T_1 = T_2$

力平衡 $p_1 = p_2$

化学平衡 $\mu_1 = \mu_2$

10、克拉珀龙方程

$$d\mu_1 = -S_1 dT + V_1 dp, \quad d\mu_2 = -S_2 dT + V_2 dp.$$

$$-S_1 dT + V_1 dp = -S_2 dT + V_2 dp.$$

$$\therefore \frac{dP}{dT} = \frac{S_1 - S_2}{V_1 - V_2} = \frac{\lambda}{T(V_1 - V_2)}.$$

可由p-T相图上斜率算出相变潜热λ、

11、热力学第三定律

永远不可能到达绝对零度.

5
统计力学

5.1 统计力学的研究目的及平衡态基本假设

5.2 正则系综

5.3 巨正则系综

5.4 自由粒子系统

5.5 能均分定理

5.6 刘维尔定理

5.7 庞加莱定理

5.8 H 定理

1、统计力学的研究目的及平衡态基本假设

研究目的：对系统的各种与时间无关的性质进行统计分析。

基本假设：　$H\psi = E\psi$
（唯一假设）　现只知系统能量处于 $E \sim E+\Delta E$ 之间，动量在 $p \sim p+\Delta p$ 之间，设满足特定条件的本征态的总数为 Ω，则处于任一态上的概率为

$$P(\text{概率}) = \frac{1}{\Omega}$$

2、正则系综

研究对象：与外界进行热量交换，但温度恒定的系统。

要求：$H = \sum_{i=1}^{M} H_i + \underbrace{\sum_{ij} u(r_{ij})}$ → 热交换项

对于每一个系统而言，其中包含的粒子数足够多，热交换项可忽略。

(1) 配分函数。设有 M 个系统组成一个系综，M_i 表示处于 ψ_i 态的系统数

$$H = \sum_{i=1}^{M} H_i, \quad \Psi = \prod_{i=1}^{M} \psi_i$$

~~每个系统的粒子数守恒~~

整个系综粒子数及能量守恒

$$\sum_{i=1}^{M} M_i = M, \quad \sum_{i=1}^{M} M_i E_i = E$$

~~只仅知系统总数，不知系统的分布{Mi}情况~~，

给定系统分布 $\{M_i\}$，系综的态数为：$\Omega = \frac{M!}{\prod_i M_i!}$

下面要问，哪种分布的概率最大？取 Ω 极值点对应的分布

$$\frac{\partial}{\partial M_i}[\ln\Omega - \alpha M - \beta E] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial[M\ln M - M - \sum_i (M_i \ln M_i - M_i) - \alpha M - \beta E]}{\partial M_i} = 0$$

$$\Rightarrow \ln M_i = -(\alpha + \beta E_i)$$

$$\Rightarrow M_i = e^{-(\alpha+\beta E_i)}$$

$P_j = \frac{e^{-\beta E_j}}{\sum_i e^{-\beta E_i}} = \frac{e^{-\beta E_j}}{Q}$ 表示最大概率分布时，处于 ψ_j 上的概率，式中 Q 为配分函数。

(2) 已知温度越高，分布概率越大，β 增大倾向于低能态，所以 β 越高能态 大，温度越低。

定义： $\beta = \frac{1}{kT}$，下面我们将证 T 为绝对温度。

考虑黑体辐射的热力学，$E_{\vec{k},\lambda} = \hbar\omega n_i$

$$Q = \sum_{\{n_{i,\vec{k},\lambda}\}} e^{-\beta\hbar\omega n_i} = \prod_{\vec{k},\lambda} (1+e^{-\beta\hbar\omega}+e^{-2\beta\hbar\omega}+\cdots)$$

$$= \prod_{\vec{k},\lambda} \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}$$

$$E = -\frac{\partial \ln Q}{\partial \beta} = \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{\hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} = \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

$$\sum_{\vec{k}} \longrightarrow \int \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\vec{k}, \quad \lambda = \pm 1$$

$$\therefore E = 2\cdot\frac{V}{(2\pi)^3}\cdot\int \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} d^3\vec{k} \xlongequal{\omega=ck} \frac{\hbar V}{\pi^2}\int \frac{\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\frac{\omega^2}{c^3} d\omega$$

$$\xlongequal{x=\beta\hbar\omega} \frac{\hbar V}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1} dx \cdot \frac{1}{(\beta\hbar)^4} \propto \frac{1}{\beta^4}$$

又由实验测得 $E \propto T^4 \Rightarrow \beta = \frac{1}{kT}$，证毕。

(3). F与Q关系

$$-\frac{\partial(\ln Q)}{\partial\beta} = E. \quad 又\ \beta = \frac{1}{kT} \Rightarrow kT^2\frac{\partial \ln Q}{\partial T} = E$$

$$又\ \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{-F}{kT}\right) = -\frac{1}{k}\,\frac{\frac{\partial F}{\partial T}\cdot T - F}{T^2} = \frac{1}{k}\left(\frac{F}{T^2}+\frac{S}{T}\right) = \frac{E}{kT^2}$$

$$\Rightarrow kT^2\frac{\partial(\ln Q + \frac{F}{kT})}{\partial T} = 0.$$

又 $T \to 0K$ 时，$Q = \omega_0 e^{-\beta E_0}$

$$-kT\ln Q = E_0 - kT\ln\omega_0.$$

$$F = E_0 - TS$$

$\therefore$ 只要满足 $S = kT\ln\omega_0$，即有 $F = -kT\ln Q$

3、巨正则系综

研究对象：不但交换能量，而且交换粒子的系统

要求：$H=\sum_i H_i+\sum_{i,j}\underbrace{U(r_{ij})}\longrightarrow$ 相互作用项

对每个系统而言，只要其包含的粒子数够多，相互作用项可忽略。

(1) 分布函数

$$H=\sum_i H_i\ ,\quad \Psi=\prod_i \psi_i$$

令 $M_{j(N)}$ 表示系综中，含有 N 个粒子，并且处于 $|j(N)\rangle$ 态上的系统数

系统总态数，总能量，总粒子数守恒

$$\sum_N\sum_{j(N)} M_{j(N)}=M\ ,\quad \sum_N\sum_{j(N)} E_{j(N)}M_{j(N)}=E$$

$$\sum_N\sum_{j(N)} N M_{j(N)}=N\cdot M$$

已知 M，E，以及 $\{M_{j(N)}\}$，系综的状态数为：

$$\Omega=\frac{M!}{\prod_N\prod_{j(N)} M_{j(N)}!}$$

$$\frac{\partial}{\partial M_{j(N)}}\left[\ln\Omega-\alpha M-\beta E-\gamma N\right]=0$$

$$\Rightarrow M_{j(N)}=e^{-(\alpha+\beta E_{j(N)}+\gamma N)}$$

$$P_{j(N)}=\frac{e^{-\beta E_{j(N)}-\gamma N}}{\sum_N\sum_{j(N)}e^{-\beta E_{j(N)}-\gamma N}}=\frac{e^{-\beta E_{j(N)}-\gamma N}}{\mathcal{Q}}$$ 表示最大概率分布时，处于 $|j(N)\rangle$

态上的概率，式中 $\mathcal{Q}$ 为巨配分函数。

(2) γ 的物理意义

设有一分布 $\{M_{j(N)}\}$，其系综的态数为

$$\Omega=\frac{M!}{\prod M_{j(N)}!}$$

$$M^{-1}\ln\Omega=M^{-1}\left[M\ln M-M-\sum\left(M_{j(N)}\ln M_{j(N)}-M_{j(N)}\right)\right]$$

$$=-\sum\frac{M_{j(N)}}{M}\ln\frac{M_{j(N)}}{M}=-P_{j(N)}\ln P_{j(N)}$$

$$=-P_{j(N)}\left[\ln\mathcal{Q}-\beta E_{j(N)}-\gamma N\right]$$

$$=\ln\mathcal{Q}+\beta E+\gamma N.$$

$$d(M^{-1}\ln\Omega)_V = \underline{d(\ln\mathcal{Q})_V} + \beta dE + \underline{E d\beta} + \gamma dN + \underline{N d\gamma}$$

$$d(\ln\mathcal{Q})_V = -E d\beta - N d\gamma$$

$$\Rightarrow d(M^{-1}\ln\Omega)_V = \beta dE + \gamma dN$$

$$d(M^{-1}\ln\Omega)_{V,N} = \beta dE = \frac{dE}{kT}$$

又 $d\left(\frac{S}{k}\right)_{V,N} = \frac{dE}{kT}$

$$\Rightarrow d(S - kM^{-1}\ln\Omega)_{V,N} = 0$$

即 $S = kM^{-1}\ln\Omega + f(V,N)$

$T\to 0$时，$\Omega = \omega_0^M$

$$kM^{-1}\ln\Omega_0 = k\ln\omega_0$$

规定 $S \to kM^{-1}\ln\Omega_0 = k\ln\omega_0$

因此，任何温度下有 $S = kM^{-1}\ln\Omega$

$\therefore k^{-1}S = \ln\mathcal{Q} + \beta E + \gamma N \Rightarrow p = \frac{kT}{V}\ln\mathcal{Q}$

$$\frac{1}{k}(dS)_V = \beta dE + \gamma dN$$

又 $dE = -pdV + TdS + \mu dN \Rightarrow \gamma = -\frac{\mu}{kT}$

引入逸度 $z \equiv e^{-\gamma} = e^{\frac{\mu}{kT}}$

$$\Rightarrow \mathcal{Q} = \sum z^N e^{-\frac{E_j(N)}{kT}}$$

4、自由粒子系统

假设粒子间无相互作用，系统的总能量等于每个粒子能量之和

$$E = \sum_\alpha n_\alpha \varepsilon_\alpha$$

$$n_\alpha = \begin{cases} 0,1 & 费米子 \\ 0,1,2,\cdots & 玻色子 \end{cases}$$

$$\therefore \mathcal{Q} = \sum_{\{n_\alpha\}} z^{\sum n_\alpha} e^{-\frac{\sum n_\alpha \varepsilon_\alpha}{kT}} = \prod \sum_{\{n_\alpha\}} z^{n_\alpha} e^{-\frac{\varepsilon_\alpha n_\alpha}{kT}}$$

$$\therefore \mathcal{Q}_{F\text{-}D} = \prod_\alpha \left(1 + z e^{-\frac{\varepsilon_\alpha}{kT}}\right)$$

$$\mathcal{Q}_{B\text{-}E} = \prod_\alpha \left(1 + z e^{-\frac{\varepsilon_\alpha}{kT}} + z^2 e^{-\frac{2\varepsilon_\alpha}{kT}} + \cdots\right)$$

$$= \prod_\alpha \frac{1}{1 - z e^{-\frac{\varepsilon_\alpha}{kT}}}$$

$$\therefore \frac{PV}{kT} = \ln \mathcal{Q} = \sum_\alpha \pm \ln\left(1 \pm z e^{-\frac{\varepsilon_\alpha}{kT}}\right) \quad \begin{cases} \text{“+”为费米子} \\ \text{“−”为玻色子} \end{cases}$$

$$z = e^{-\nu}, \quad \frac{\partial \ln \mathcal{Q}}{\partial \ln z} = \frac{z}{\mathcal{Q}} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial z} = -\frac{1}{\mathcal{Q}} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \nu} = \sum N z^N e^{-\frac{E_j(N)}{kT}} / \mathcal{Q} = \mathcal{N}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{N}}{V} = \frac{\partial}{\partial \ln z}\left(\frac{P}{kT}\right) = z \frac{\partial}{\partial z}\left[\pm \omega \int \frac{d^3\vec{k}}{8\pi^3} \ln\left(1 \pm z e^{-\frac{\varepsilon_\alpha}{kT}}\right)\right]$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{简并度}}}{\omega} \int \frac{d^3\vec{k}}{8\pi^3} \frac{z e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{1 \pm z e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}} = \omega \int \frac{d^3\vec{k}}{8\pi^3} \frac{1}{z^{-1} e^{\varepsilon/kT} \pm 1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{1}{z^{-1} e^{\varepsilon_\alpha/kT} \pm 1}$$

费米子 $\langle n_\alpha \rangle = \dfrac{1}{z^{-1} e^{\varepsilon_\alpha/kT} + 1} = \dfrac{1}{e^{\frac{\varepsilon_\alpha - \mu}{kT}} + 1}$

玻色子 $\langle n_\alpha \rangle = \dfrac{x + 2x^2 + \cdots}{1 + x + x^2 + \cdots} = \dfrac{1}{e^{\frac{\varepsilon_\alpha - \mu}{kT}} - 1}$

$$\therefore \langle n_\alpha \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_\alpha - \mu}{kT}} \pm 1} \quad \begin{cases} \text{“+”为费米子} \\ \text{“−”为玻色子} \end{cases}$$

$$\mathcal{N} = \sum_\alpha \langle n_\alpha \rangle = \frac{\omega}{8\pi^3} V \int d^3\vec{k} \langle n_\varepsilon \rangle$$

$$= \frac{\omega}{8\pi^3} V \int \frac{d^3\vec{k}}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} \pm 1}$$

$$E = \frac{\omega}{8\pi^3} V \int \frac{d^3\vec{k} \cdot \varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} \pm 1}$$

5、能均分定理

$$1=\frac{1}{Q}\frac{2V}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\ e^{-\beta E}$$

设 $E=\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)=\frac{\hbar^2}{2m}(k_1^2+k_2^2+k_3^2)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hbar^2}{2m}k_1^2 e^{-\beta\cdot\frac{\hbar^2}{2m}k_1^2}dk_1$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hbar^2}{2m}k_1^2\ de^{-\beta\frac{\hbar^2}{2m}k_1^2}\cdot\left(\frac{2m}{-\beta\hbar^2\cdot 2k_1}\right)$$

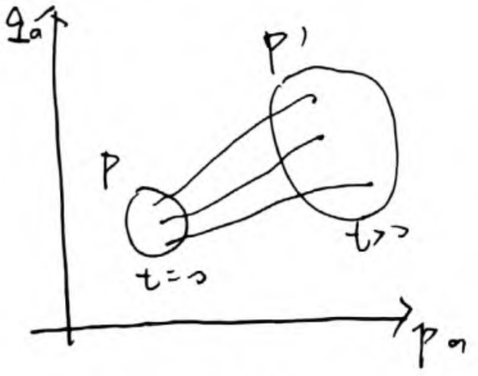
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{k_1}{2\beta}\right)de^{-\beta\frac{\hbar^2k_1^2}{2m}}$$

$$=\frac{-1}{2\beta}\left(k_1e^{-\beta\frac{\hbar^2k_1^2}{2m}}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta\frac{\hbar^2k_1^2}{2m}}dk_1\right)$$

$$=\frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta\frac{\hbar^2k_1^2}{2m}}dk_1$$

$$\Rightarrow\ \overline{\frac{\hbar^2}{2m}k_1^2}=\frac{1}{2\beta}=\frac{1}{2}kT.$$

6、刘维尔定理.



$$\oint\rho\vec{v}\cdot d\vec{s}=-\frac{\partial}{\partial t}\int\rho d\tau.$$

又 $\oint\rho\vec{v}\cdot d\vec{s}=\Sigma\int\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)\,d\tau.$

$$\Rightarrow\int\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\Sigma\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i}\right]d\tau=0.$$

又 $\dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$, $\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$ $\Rightarrow\frac{\partial\dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha}+\frac{\partial\dot{q}_\alpha}{\partial q_\alpha}=0$, 即 $\Sigma\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0$

$$\therefore\ \frac{\partial\rho}{\partial t}+\Sigma\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\cdot v_i+\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\cdot\rho}_{0}\right)=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial\rho}{\partial t}+\Sigma v_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i}=0\quad\text{即为}\ \frac{D\rho}{Dt}=0.$$

刘维尔定理表示相空间中流体不可压缩，所有相点安价，即表示等概率假设是成立的.

7、庞加莱定理：若$t=0$时，系统从相空间一固定点P出发，则对空间中任意小距离ε，该系统在一有限时间$T(\varepsilon)$内，必然经过相空间另一点P'，而距离$|PP'|<\varepsilon$

8、H定理

设系综是由N个系统构成的，每个系统哈密顿量为$H(i)$，系统之间的微扰为H_1，则

$$\mathcal{H}=\sum_{i=1}^{N}H(i)+H_1.$$

我们先构造一个函数

$$\mathcal{H}\equiv\sum_n N_n \ln N_n.$$

式中N_n表示处在ψ_n态的系统数。$\sum_n N_n=N$.

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt}=\sum_n\frac{dN_n}{dt}(\ln N_n+1)=\sum_n\frac{dN_n}{dt}\ln N_n$$

$$=\sum_n\sum_{n\neq m}T_{nm}(N_m-N_n)\ln N_n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_n\sum_m T_{mn}(N_m\ln N_n-N_n\ln N_n-N_m\ln N_m+N_n\ln N_m)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_n\sum_m T_{mn}(N_m-N_n)\ln\frac{N_m}{N_n}\leq 0.$$

T_{mn}表示由H_1微扰引起的，单位时间从m态跃迁到n态的概率.

试考虑$\mathcal{H}$与熵的关系

$$\Omega=\frac{N!}{\prod_m N_m!}$$

$$\ln\Omega=N\ln N-\sum_m N_m\ln N_m$$

$$S=-\frac{k}{N}\ln\Omega=k\ln N-\frac{k}{N}\mathcal{H}$$

$$\frac{dS}{dt}=-\frac{k}{N}\frac{d\mathcal{H}}{dt}\geq 0.$$

S单调上升，$\mathcal{H}$单调下降，这就是H定理，说明了热力学熵增的道理.

H定理成立的假设 ① 一个大系统受外来H_1随机的干扰，H_1与系统能量相比很微小.

② H_1随机地使系统的相位无规化.

微观永远可逆，但正向与反向进行的概率大不相同

6

量子力学

1、量子力学的出现.

(1) 黑体辐射.(普朗克定律).

$u(\nu)$是单位空间和单位频率的辐射能量.

考虑边长为L的正方体空腔.

$$k_x = \frac{\pi}{L} n_x \quad , n_x = 1,2,\cdots.$$

$dk_x = \frac{\pi}{L} dn_x$ 考虑到电磁波有两个传播方向. $dk_x = \frac{2\pi}{L} dn_x$.

$$\Rightarrow dN = dn_x dn_y dn_z = \frac{L^3}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z = \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi k^2 dk.$$

由 $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{c}\nu$.

$\Rightarrow dN = \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi \cdot \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2 \frac{2\pi}{c} d\nu$. 考虑到光的偏振性,上式还要乘以2.

光子服从玻色分布 $f(\nu) = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$,单光子能量 $\varepsilon = h\nu$.

$$\Rightarrow u(\nu) = \frac{dN}{V d\nu} f(\nu) \cdot h\nu = \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3 (e^{\frac{h\nu}{kT}}-1)}.$$

波长很长时 $\nu \ll 1$, $u(\nu) \approx \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} \frac{kT}{h\nu} = \frac{8\pi kT \nu^2}{c^3}$ (瑞利-金斯曲线)

波长很短时. $\nu \gg 1$. $u(\nu) \approx \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}}$. (维恩曲线).

(2) 氢原子谱线 (玻尔原子模型).

$$E \propto \frac{1}{n^2}.$$

(3) 波粒二象性.

康普顿散射直接证明了光子具有动量.

2、薛定谔方程的导出.

哈密顿方程. $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0.$

经典力学中的等作用量面类似于光学中的等相面.

经典力学与量子力学的对应关系类似于几何光学与波动光学的对应关系.

用 $S/\hbar$ 表示相位. $\psi = \psi_0 e^{iS/\hbar} \Rightarrow S = -i\hbar \ln \psi/\psi_0$.

代入 $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0$、得.

$$-i\hbar\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{1}{\psi}\nabla\psi\right)^2+U=0.$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{-\hbar^2}{2m\psi}(\nabla\psi)^2+U\psi.$$ （非线性薛定谔方程）.

1926年薛定谔注意到将动量 p 换成算符 $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$，改写了~~哈密顿~~薛定谔方程.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+U\psi.$$

3. 量子力学基本原理

(1) 量子力学中，状态由满足单值性和可积性的波函数 ψ 定义.

(2) 每一个可观测量对应一个线性算符.

(3) 可观测量的观测测值由本征值方程的本征值给出.

(4) 在量子态 $|\psi\rangle$ 下，可观测量 P 多次观测的平均值

4、不确定性关系与概率流.

施瓦茨不等式 ~~$\langle A|A\rangle$~~ $\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle\geq|\langle x|y\rangle|^2$.

取 $|x\rangle=(\hat{A}-a)|\psi\rangle$，$|y\rangle=(\hat{B}-b)|\psi\rangle$.

$$\langle x|x\rangle=\langle\psi|(\hat{A}^+-a)(\hat{A}-a)|\psi\rangle=\overline{(\Delta A)^2}$$

$$\langle y|y\rangle=\overline{(\Delta B)^2}.$$

$$\langle x|y\rangle=\langle\psi|(\hat{A}^+-a)(\hat{B}-b)|\psi\rangle.$$

$$=\langle\psi|(\hat{A}\hat{B}-a\hat{B}-b\hat{A}+ab)|\psi\rangle.$$

代入施瓦茨不等式.

$$\overline{(\Delta A)^2}\,\overline{(\Delta B)^2}\geqslant\left(\frac{\langle\psi|[\hat{A},\hat{B}]|\psi\rangle}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\langle\psi|\{\hat{A},\hat{B}\}|\psi\rangle-ab\right)^2.$$

$$\geqslant\left|\langle\psi|\frac{[\hat{A},\hat{B}]}{2}|\psi\rangle\right|^2.$$

令 $\hat{A}=\hat{x}$，$\hat{B}=\hat{p}$，$[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$.

$$\Rightarrow\overline{\Delta x^2}\cdot\overline{\Delta p^2}\geqslant\frac{\hbar^2}{4}.$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi.$$

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + U\psi^*$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi\psi^*}{\partial t} = \psi^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi\right) - \psi\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + U\psi^*\right).$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\cdot\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right).$$

$$\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\nabla\cdot\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right).$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = \nabla\cdot\vec{J}.$$

5.氢原子基态波函数.

$$\psi_{nlm} = R_{nl}(r)\,Y_l^m(\theta,\phi).$$

$$\psi_{100} = (\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}.$$

式中 $a_0 = \frac{\hbar^2\cdot 4\pi\varepsilon_0}{e^2\mu}.$

验证: $\int_0^\infty |\psi_{100}|^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{\pi a_0^3}\int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}} r^2 dr$

$$= \frac{4\pi}{\pi a_0^3}\int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}}\left(\frac{2r}{a_0}\right)^2\left(\frac{a_0}{2}\right)^3 d\left(\frac{2r}{a_0}\right)$$

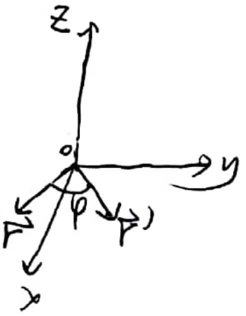
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t} t^2 dt.$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma(3)$$

$$= 1.$$

6.转动和相似变换

绕z轴逆时针旋转φ角对应的矩阵为 $R_z(\varphi)$.



$$x' = r\cos(\varphi+\varphi_0) = r(\cos\varphi\cos\varphi_0 - \sin\varphi\sin\varphi_0)$$

$$= \cos\varphi\cdot x - \sin\varphi\cdot y$$

$$y' = r\sin(\varphi+\varphi_0)$$

$$= \sin\varphi\, x + \cos\varphi\, y$$

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

相似变换 $B=P^{-1}AP$，B与A有相同特征值.

7、谐振子的代数解法.

引入辅助算符 $a=\frac{\hat{x}+i\hat{p}}{\sqrt{2}}$，$a^+=\frac{\hat{x}-i\hat{p}}{\sqrt{2}}$.

取单位 $\mu=\omega_0=1$，谐振子的哈密顿量表示为 $\hat{H}=\frac{1}{2}(\hat{x}^2+\hat{p}^2)$

$\hat{a}\hat{a}^+=\frac{1}{2}(\hat{x}+i\hat{p})(\hat{x}-i\hat{p})=\frac{1}{2}(x^2-ixp+ipx+p^2)$

$=\frac{1}{2}(x^2+p^2+\hbar)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(x^2+p^2)=aa^+-\frac{\hbar}{2}$

$\Leftrightarrow \hat{H}=aa^+-\frac{\hbar}{2}=N+\frac{\hbar}{2}$

式中 $N\equiv a^+a$，$N|n\rangle\equiv N_n|n\rangle$.

$a^+a=\frac{1}{2}(x^2+p^2-\hbar)=aa^+-\hbar$

$\therefore [a,a^+]=\hbar$

$[N,a]=a^+aa-aa^+a=a^+[a,a]+[a^+,a]a=-\hbar a$.

$[N,a^+]=a^+[a,a^+]=\hbar a^+$

$\therefore Na|n\rangle=aN|n\rangle-\hbar a|n\rangle=(N_n-\hbar)a|n\rangle$

表明 $a|n\rangle$ 是N的本征态，但本征值相比于 $|n\rangle$ 的本征值小了 $\hbar$.

$Na^+|n\rangle=a^+N|n\rangle+\hbar a^+|n\rangle=(N_n+\hbar)a^+|n\rangle$.

表明 $a^+|n\rangle$ 是N的本征态，但本征值相比于 $|n\rangle$ 的本征值大了 $\hbar$.

所以我们把 a 与 a^+ 分别称为降算符与升算符.

由于 $\langle m|\hat{N}|m\rangle=\langle m|a^+a|m\rangle=\langle am|am\rangle\geq 0$.

所以 $N_n\geq 0$

由于 $N_n\pm k\hbar$ 都是N的本征值，所以必有最小的一个值0，即存在

一个态 $|0\rangle$，使 $a|0\rangle=0$，$N|0\rangle=0$.，$N|n\rangle=n\hbar=N_n$

$\Rightarrow$ H本征值为 $\hbar(n+\frac{1}{2})$.

~~基态波函数~~

设 $a|n\rangle=C_n|n-1\rangle \Rightarrow \langle n|a^+a|n\rangle=C_n^2=n\hbar \Rightarrow C_n=\sqrt{n\hbar}$.，$a|n\rangle=\sqrt{n\hbar}|n-1\rangle$

$a^+|n\rangle=C_n^+|n-1\rangle \Rightarrow \langle n|aa^+|n\rangle=C_n^{+2}=(n+1)\hbar \Rightarrow C_n^+=\sqrt{(n+1)\hbar}$，$a^+|n\rangle=\sqrt{(n+1)\hbar}|n+1\rangle$

基态波函数满足 $a|0\rangle=0$

即 $\frac{x+ip}{\sqrt{2}}\psi_0(x)=0 \iff (x+\hbar\frac{\partial}{\partial x})\psi_0(x)=0$

$\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}=-x\psi$，$\frac{\partial\psi}{\psi}=-\frac{x}{\hbar}\partial x$

$\psi_0(x)=\psi_0 e^{-\frac{x^2}{2\hbar}}$

$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_0(x)|^2dx=\psi_0^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{\hbar}}d\frac{x}{\sqrt{\hbar}}\sqrt{\hbar}=\sqrt{\pi\hbar}\psi_0^2=1$

$\therefore \psi_0=(\pi\hbar)^{-\frac{1}{4}}$.

$\psi_0(x)=\frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}}e^{-\frac{x^2}{2\hbar}}$

8、角动量的代数理论

$\hat{L}=\hat{r}\times\hat{p}=\frac{\hbar}{i}\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ x & y & z\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\end{vmatrix}=\frac{\hbar}{i}\left[(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial z})\vec{e_x}+(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z})\vec{e_y}+(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x})\vec{e_z}\right.$

$[L_x,L_y]=[xp_y-yp_x,zp_x-xp_z]=z[x,p_x]p_y+y[p_y,x]p_z$

$=i\hbar(zp_y-yp_z)$

$=i\hbar L_x$

$\hat{L}\times\hat{L}=i\hbar\hat{L}$ 该式对于角动量算符最本质.

9、态矢、内积、算符方程的矩阵表示.

给定一组正交归一完备基矢$\{|\psi_i\rangle\}$，其中完备性表示为

~~$\sum_i\langle\psi_i|\psi_i\rangle=1$.~~ $\sum_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|=1$

对于~~任一个~~一般的态矢$|\Phi\rangle$，有.

$|\Phi\rangle=\sum_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\Phi\rangle=\sum_i c_i|\psi_i\rangle$，式中 $c_i=\langle\psi_i|\Phi\rangle$.

内积可表示为

$\langle\Psi|\Phi\rangle=\sum_i\langle\Psi|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\Phi\rangle=\sum_i d_i^* c_i$，式中 $d_i=\langle\psi_i|\Psi\rangle$，$c_i=\langle\psi_i|\Phi\rangle$

算符方程可表示为

$\hat{F}|\Phi\rangle=|\Psi\rangle$.

$\sum_j\hat{F}|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\Phi\rangle=\sum_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\Psi\rangle$.

$\sum_{k,j}|\psi_k\rangle\langle\psi_k|\hat{F}|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\Phi\rangle=\sum_{k,j}|\psi_k\rangle\langle\psi_k|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\Psi\rangle$.

$\Rightarrow F_{kj}c_j=d_k$，式中 $F_{kj}=\langle\psi_k|\hat{F}|\psi_j\rangle$，$c_j=\langle\psi_j|\Phi\rangle$，$d_k=\langle\psi_k|\Psi\rangle$

10、三种绘景

(1) 薛定谔绘景

~~态矢~~ 态矢 ~~随时~~ 承担所有的时变部分，算符与基矢都不随时间改变.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi.$$

(2) 海森伯绘景.

态矢不随时间变化，算符承担全部的时间变化.

$$\frac{d}{dt}\hat{F}(t)=\frac{1}{i\hbar}[\hat{F}(t),\hat{H}]+\left(\frac{\partial\hat{F}_s}{\partial t}\right)_H,\quad \left(\frac{\partial\hat{F}_s}{\partial t}\right)_H\equiv U^{+}(t)\frac{\partial\hat{F}_s}{\partial t}U(t)$$

$$U(t)\equiv T\exp\left(\frac{-i}{\hbar}\int_0^t dt'\hat{H}(t')\right)$$

(3) 相互作用绘景 (狄拉克绘景).

态矢和算符都承担时间变化.

$$\hat{H}=\hat{H}_0+V$$

$$i\hbar\frac{d\hat{F}(t)}{dt}=[\hat{F}(t),\hat{H}_0].$$

11、坐标动量表象.

坐标算符 $\hat{x}$ 的表象中，么正基由 $\hat{x}$ 的本征矢构成，$\hat{x}|\xi\rangle=x|\xi\rangle$，$\langle\xi|\xi'\rangle=\delta(\xi-\xi')$

本征矢的归一性表现为

$$\int d\xi'|\xi'\rangle\langle\xi'|=1.$$

在坐标表象中，动量算符的本征态为 $|p\rangle$，波函数为 $\phi_p(x)$

$$\hat{p}\phi_p(x)=p\phi_p(x)\Rightarrow\frac{\hbar}{i}\frac{d\phi_p}{dx}=p\phi_p\Rightarrow\frac{d\phi_p}{\phi_p}=p\frac{i}{\hbar}dx.$$

$$\phi_p(x)=C\cdot e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

$$\langle p'|p\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}|C|^2e^{i(p-p')x/\hbar}dx=|C|^2\,2\pi\hbar\,\delta(p-p')$$

$$\therefore C=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}},\quad \phi_p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{ipx}{\hbar}}.$$

任意波函数均可用 $\phi_p(x)$ 来表示

~~$|\Psi\rangle=\int \cdots c(p)$~~

$$\Psi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}c(p)\phi_p(x)\,dp=\int_{-\infty}^{\infty}c(p)\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{ipx}{\hbar}}dp.$$

式中 $c(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x)e^{-\frac{ipx}{\hbar}}dx$

用态矢来表示就是 $\langle x|\Psi\rangle=\int\langle x|p\rangle\langle p|\Psi\rangle dp$

$$\langle x|p\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{ipx}{\hbar}},\quad c(p)=\langle p|\Psi\rangle$$

从坐标表象到动量表象变换的幺正算符为.

$$U=\int |p\rangle\langle x|\,dx.$$

有 $U|x\rangle=\int |p\rangle\langle x'|x\rangle dx' = |p\rangle\big|_x$. $\int\langle x|U^+|x'\rangle\Psi(x')dx'$.

$C(p)=\langle p|\Psi\rangle=\int\langle x|U^+|x'\rangle\langle x'|\Psi\rangle dx'=\int\langle x|U^+|x'\rangle\Psi(x')dx'$.

12. 自旋与泡利矩阵的导入.

1922年 Stern-Gerlach实验发现了电子的自旋.

设原子第一次经过 $\hat{S}_z$ 装置时,分成两束原子的状态为 $|+\rangle,|-\rangle$,

以这两个量子态为基矢

$$|+\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad |-\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

$$\hat{S}_z|\pm\rangle=\pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle.$$

$$\therefore \hat{S}_z=\frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|).$$

经过 $\hat{S}_z$ 的某一束原子,再经过 $\hat{S}_x,\hat{S}_y$ 装置时,仍等概率的分成两束.

设经过 $\hat{S}_x,\hat{S}_y$ 装置后的量子态分别为.

$|\hat{S}_x;+\rangle,\ |\hat{S}_x;-\rangle,\ |\hat{S}_y;+\rangle,\ |\hat{S}_y;-\rangle$.

其中 $|\hat{S}_x;+\rangle$ 表示经过 $\hat{S}_x$ 后向某一方向偏的原子的量子态, $|\hat{S}_x;-\rangle$ 表示经过 $\hat{S}_x$ 后向另一方向偏的原子的原子态.

$$\hat{S}_x|\hat{S}_x;\pm\rangle=\pm\frac{\hbar}{2}|\hat{S}_x;\pm\rangle.$$

$$\hat{S}_y|\hat{S}_y;\pm\rangle=\pm\frac{\hbar}{2}|\hat{S}_y;\pm\rangle.$$

$$|\hat{S}_y;+\rangle=\frac{1}{\sqrt2}(|+\rangle+e^{i\delta_2}|-\rangle)$$

$$|\hat{S}_y;-\rangle=\frac{1}{\sqrt2}(|+\rangle-e^{i\delta_2}|-\rangle).$$

$$|\hat{S}_x;+\rangle=\frac{1}{\sqrt2}(|+\rangle+e^{i\delta_1}|-\rangle).$$

$$|\hat{S}_x;-\rangle=\frac{1}{\sqrt2}(|+\rangle-e^{i\delta_1}|-\rangle).$$

先后经过 $\hat{S}_x,\hat{S}_y$ 的原子也会按概率分成两束

$$|\langle\hat{S}_y;+|\hat{S}_x;+\rangle|^2=\frac{1}{2}\left|\left(1+e^{i(\delta_1-\delta_2)}\right)\right|=\frac{\sqrt2}{2}\Rightarrow \delta_1-\delta_2=\frac{\pi}{2}.$$

令 $\delta_1=0$ $\delta_2=\frac{\pi}{2}$.

则 $|\hat{S}_x;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle)$

$|\hat{S}_y;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm i|-\rangle)$

~~写成矩阵形式~~

$\cancel{\hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\because \cancel{\hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)}$

$\cancel{\hat{S}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle\langle+| - i|-}$

$\hat{S}_x|\hat{S}_x;\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\hat{S}_x;\pm\rangle$, $\hat{S}_y|\hat{S}_y;\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\hat{S}_y;\pm\rangle$.

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}(|\hat{S}_x;+\rangle\langle\hat{S}_x;+| - |\hat{S}_x;-\rangle\langle\hat{S}_x;-|).$$

$$= \frac{\hbar}{2}\cdot\frac{1}{2}[(|+\rangle + |-\rangle)(\langle+| + \langle-|) - (|+\rangle - |-\rangle)(\langle+| - \langle-|)].$$

$$= \frac{\hbar}{4}\cdot 2(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|).$$

$$= \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|).$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\cdot(|\hat{S}_y;+\rangle\langle\hat{S}_y;+| - |\hat{S}_y;-\rangle\langle\hat{S}_y;-|).$$

$$= \frac{\hbar}{2}\frac{1}{2}[(|+\rangle + i|-\rangle)(\langle+| - i\langle-|) - (|+\rangle - i|-\rangle)(\langle+| + i\langle-|)].$$

$$= \frac{\hbar}{2}[i(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)].$$

$$= \frac{i\hbar}{2}(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)$$

又 $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)$.

把它们三个写成矩阵形式为

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}.$$

$\vec{\sigma}$ 为泡利矩阵.

13. Landau能级及能级简并度

电子在磁场中的哈密顿量为

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}(\vec{p}+e\vec{A})^2$$

~~对于二维电子气，取~~

以外磁场方向为z轴，建立直角坐标系则$\vec{B}=B\vec{e_z}$。由磁矢势定义式

$\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$，我们可以取$\vec{A}=Bx\vec{e_y}$，则哈密顿量可表示为

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}[\hat{p}_x^2+\hat{p}_z^2+(\hat{p}_y+eBx)^2].$$

由于$[\hat{H},\hat{p}_y]=[\hat{H},\hat{p}_z]=0$，设本征波函数$\psi(x,y,z)=e^{i(k_y y+k_z z)}\varphi(x)$

于是有 $\hat{H}\psi(x,y,z)=\frac{1}{2m}[p_x^2+p_z^2+(p_y+eBx)^2]\psi(x,y,z)=E\psi(x,y,z)$

$$\Rightarrow\frac{1}{2m}[p_x^2+(p_y+eBx)^2]\varphi(x)=\left(E-\frac{p_z^2}{2m}\right)\varphi(x)=E'\varphi(x)$$

式中$E'=E-\frac{p_z^2}{2m}$.

令$\omega=\frac{eB}{m}$，$L_0=\frac{p_y}{eB}$，则上式可写成.

$$\left[\frac{p_x^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}(x+L_0)^2\right]\varphi(x)=E'\varphi(x).$$

这是中心在$x_0=-L=-\frac{p_y}{eB}$的一维简谐振子的振动方程，所以

电子的本征能量

$$E=\hbar\omega(n+\tfrac{1}{2})+\frac{p_z^2}{2m}$$

简并度的计算：对于一个边长分别为L_x, L_y的二维电子气.

$$e^{ik_yL_y}=1\quad\Rightarrow k_y=\frac{2\pi}{L_y}n_y\quad(n_y=0,1,2,\cdots).$$

$$\Delta k_y=\frac{2\pi}{L_y}.$$

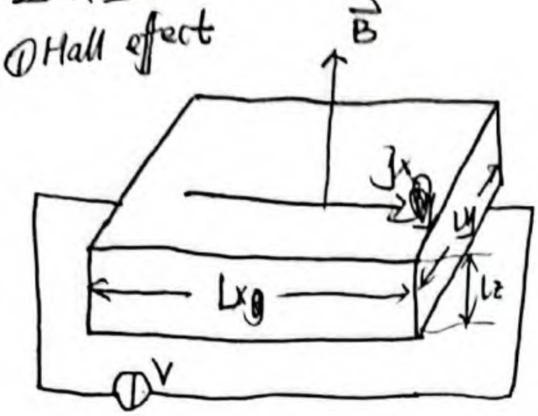
$$\Delta x_0=\frac{\hbar}{eB}\Delta k_y=\frac{h}{eBL_y}$$

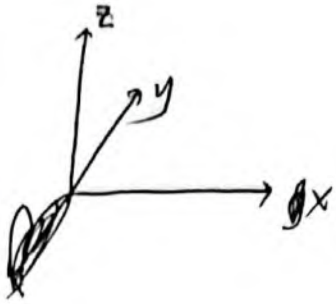
$$\therefore D=\frac{L_x}{\Delta x_0}=\frac{SeB}{h}=\frac{\Phi}{\Phi_0},\quad\Phi_0=\frac{h}{e}\text{ 称为磁通量子.}$$

从波函数形式看来x与y坐标是不等价的，但是没有任何(原始)物理量能体现出x与y方向的不等价性。事实上，如果我们选取不同的磁矢势A，会对应不同形式的波函数。所以以上计算结果是由于我们选取了特殊的规范势，电子能量在x-y平面内都是量子化的。

整数量子霍尔效应

① Hall effect





$$\begin{cases} j_x = \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y \\ j_y = \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y \end{cases} \qquad \begin{cases} E_x = \rho_{xx}j_x + \rho_{xy}j_y \\ E_y = \rho_{yx}j_x + \rho_{yy}j_y . \end{cases}$$

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}, \ \vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \ \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}, \ \rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix}.$$

$$\vec{j} = \sigma\cdot\vec{E} = \sigma\cdot\rho\vec{j}, \ \vec{E} = \rho\vec{j} = \rho\cdot\sigma\cdot\vec{E} \Rightarrow \rho^{-1} = \sigma, \ \sigma^{-1} = \rho .$$

$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ 当$\tau \ll 1$时, $\vec{F} = \frac{e\vec{v}}{\tau}$.

即 $m\vec{v} = e\tau(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$

$$\therefore \begin{cases} m v_x = e\tau E_x + e\tau B v_y \\ m v_y = e\tau E_y - e\tau B v_x . \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{m}{e\tau} v_x - B v_y \\ E_y = B v_x + \frac{m}{e\tau} v_y . \end{cases} \qquad j_x = -ne v_x, \ j_y = -ne v_y$$

$$\text{即}\ \rho = \begin{pmatrix} \frac{m}{e\tau} & -B \\ B & \frac{m}{e\tau} \end{pmatrix}\frac{1}{ne} = \frac{m}{e\tau}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{Be\tau}{m} \\ \frac{Be\tau}{m} & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{ne} = \rho_0\begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix}$$

，式中 $\rho_0 = \frac{m}{ne^2\tau}$. $\omega_c = \frac{Be}{m}$

$$\therefore \sigma = \rho^{-1} = \sigma_0 \cdot \frac{1}{1+\omega_c^2\tau^2}\begin{pmatrix} 1 & \omega_c\tau \\ -\omega_c\tau & 1 \end{pmatrix}$$

，式中 $\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$

$$\text{即} \begin{cases} j_x = \frac{\sigma_0}{1+\omega_c^2\tau^2}E_x + \frac{\sigma_0\omega_c\tau}{1+\omega_c^2\tau^2}E_y \\ j_y = \frac{-\sigma_0\omega_c\tau}{1+\omega_c^2\tau^2}E_x + \frac{\sigma_0}{1+\omega_c^2\tau^2}E_y . \end{cases}, \quad \begin{cases} E_x = \rho_0 j_x - \rho_0\omega_c\tau j_y \\ E_y = \rho_0\omega_c\tau j_x + \rho_0 j_y . \end{cases}$$

$$R_{xx} = \rho_{xx}\cdot\frac{L_x}{L_y\cdot L_z}, \ \cancel{R_{xy} = \rho_{xy}} \ \rho_{xy} = E_y/j_x = \frac{V_y/L_y}{I_x/L_yL_z} = L_z R_{xy} .$$

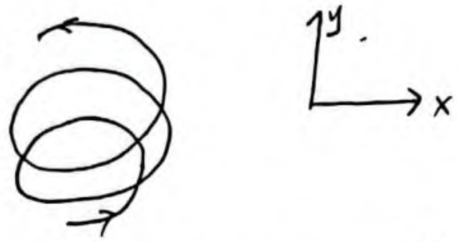
② Quantum Hall effect.

当 $\tau\to\infty$ 时 (低温, 强磁场).

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}).$$

即
$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt}=eE_x+eBv_y \\ m\dfrac{dv_y}{dt}=\cancel{\ \ }-eBv_x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} v_x=r_0\omega_c\sin(\omega_c t). \\ v_y=r_0\omega_c\cos(\omega_c t)-E_x/B \end{cases}$$

∴ 电子轨迹.



$$\bar{v}_x=0,\ \bar{v}_y=-E_x/B.\ \Rightarrow j_x=0,\ j_y=ne\bar{v}_y=-\frac{neE_x}{B},\ E_x=\frac{-j_yB}{ne},\ E_y=0.$$

$$\vec{j}=\sigma\vec{E}\Rightarrow\sigma=\begin{pmatrix}0 & \frac{ne}{B}\\ \frac{-ne}{B} & 0\end{pmatrix}$$

$$\vec{E}=\rho\vec{j}\Rightarrow\rho=\begin{pmatrix}0 & \frac{-B}{ne}\\ \frac{B}{ne} & 0\end{pmatrix}.$$

考虑二维外加磁场B下的二维电子气.

$$H=\frac{1}{2m}(\vec{p}-e\vec{A})^2$$

$$\vec{A}=(0,Bx,0)\Rightarrow\hat{H}=\frac{\hat{p}_x^2}{2m}+\frac{\hat{p}_y^2}{2m}-\frac{qB}{m}\hat{x}\hat{p}_y+\frac{q^2B^2}{2m}\hat{x}^2$$

$$=\frac{\hat{p}_x^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_c^2\left(\hat{x}-\frac{\hbar k_y}{m\omega_c}\right)^2.$$

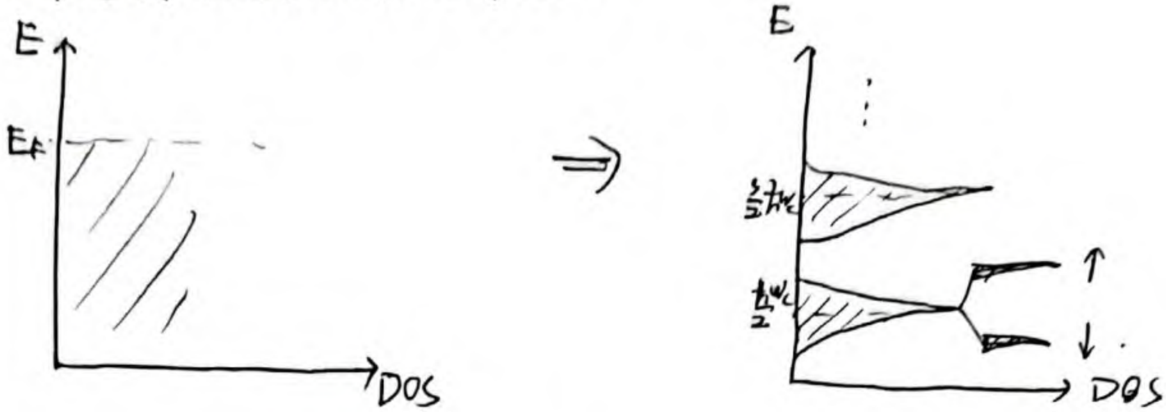
$$\therefore E_n=\hbar\omega_c(n+\tfrac{1}{2}).$$

再加一个沿x轴的电场.

$$H=\frac{1}{2m}(\vec{p}-e\vec{A})^2-eEx.$$

$$\therefore E_x=\underbrace{\hbar\omega_c(n+\tfrac{1}{2})}_{\text{回旋运动能量}}\underbrace{-eEX}_{\text{势能}}+\underbrace{\frac{m^*}{2}\left(\frac{E}{B}\right)^2}_{\text{漂移动能}}.$$

电子能带结构由连续结构变成朗道能级.



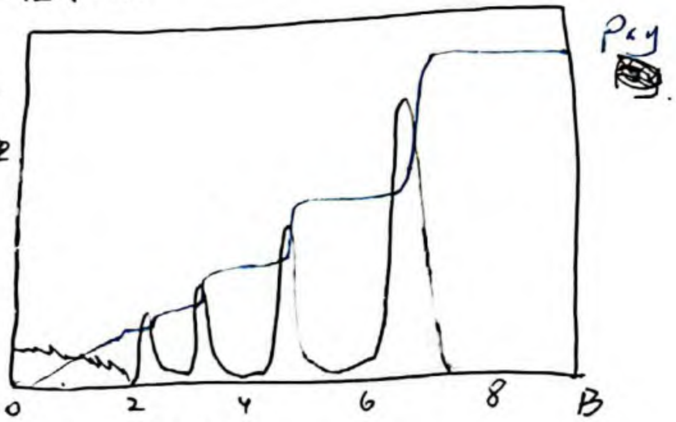
且每个朗道能级简并度为 $\hbar\omega_c\cdot\frac{m}{\pi\hbar^2}=\frac{eB}{\pi\hbar}=D\cdot2$，D为单自旋电子能级简并度

对导电性能有影响的为朗道能级内所有电子.

$$\therefore n = iD = \frac{ieB}{h}$$

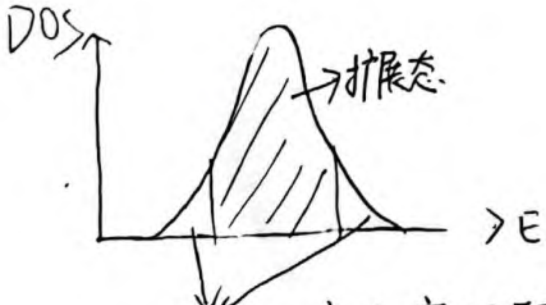
$$\Rightarrow \rho = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{h}{ie^2} \\ \frac{h}{ie^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad i=1,2,\cdots$$

此即量子霍尔效应.



下面解释 ρ_{xy} 平台的原因.

电子在等能面上运动，所以对于一个展宽的朗道能级，存在局域态和扩展态、当费米能级在禁带或局域态内部，ρ_{xy} 不变，所以存在 ρ_{xy} 的平台.



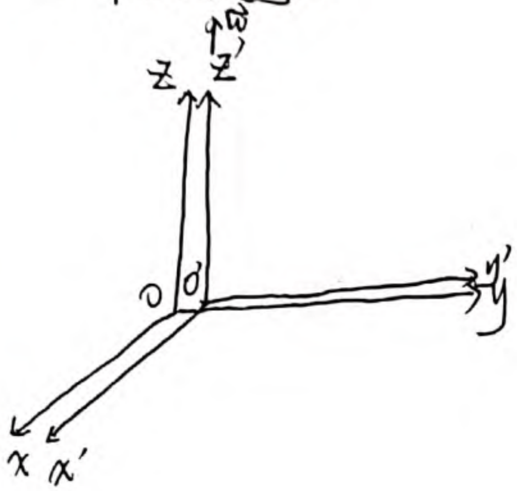
局域态（类比高低不平的地貌，只有高度接近水平面的水才能自由流动）

Part II

第二部分：应用

7
科里奥利力与傅科摆

1. 科里奥利力.



$$\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$$

$$\vec{r}' = x'\vec{e_x}' + y'\vec{e_y}' + z'\vec{e_z}'$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}')$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

$$= \vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}').$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') - 2\vec{\omega}\times\vec{v}'.$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{a}' = \vec{a} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

科里奥利力 $\vec{f}_{cor} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$.

北半球南北流向的河右岸水土易流失就是科里奥利力作用的结果.

2. 傅科摆.

由于 $\vec{f}_{cor}$ 的影响，在北半球 单摆的平面会顺时针转动

Part III

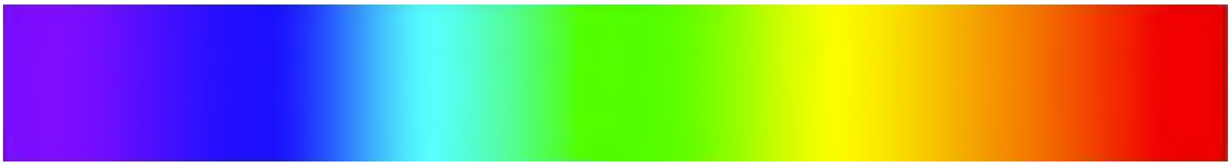
第三部分：发展史

上帝说要有光，于是就有了光。

—《圣经·旧约·创世纪》

8

光的故事



8.1 古希腊时期-17 世纪初

人类对于科学的探索与探寻光的本质密切相关。在远古时期，无论是西方还是东方世界，人类都毫不掩饰自己对于光明的向往与崇敬，这在他们的流传下来的宗教信仰和神话传说中都有体现：中国有炎帝叫来太阳为农民带来光明与丰收的传说，西方则有普罗米修斯盗天火为人类带来光明的神话。在人类文明发展的历程中，对于光的探索从未间断。

到了古希腊时期，西方诞生了以欧几里得为首的许多著名的哲学家，他们认为我们人眼能看到物体是因为人眼发出的光线碰到了物体的表面，而且人眼发出的光线是一条直线，这一理论能够解释物体近大远小的现象，而且意味着我们可以将数学中的几何学引入到对于光的研究当中。这个伟大的猜想占据了主流学界多年，直到一位叫埃尔哈森的科学家出现。在埃尔哈森生活的年代，许多学者都想为有权势的宫廷或者政府工作，他也不例外。但是不幸的是，埃尔哈森效力的君王具有很强的控制欲，他一想到世界上还有自己无法控制的事物就寝食难安，由于当时西方没有现代那么先进的防洪设备和措施，经常发生洪涝灾害，君王就命令埃尔哈森在 3 个月内治理尼罗河的洪灾，治理不好就要将其处死。受限于时代条件，埃尔哈森当然没有办法完成这个目标，于是他装疯，希望能逃过一劫。但是事与愿违，埃尔哈森被下令关进地牢中，一直到君王死亡，等到他被放出来时时间已经过去了 12 年。在地牢中埃尔哈森很少能看到太阳，陪伴他的是长时间的黑暗与孤独。可能是太过无聊，埃尔哈森在狱中便开始思考光的本质。他发现在长时间处于黑暗当中后，眼睛突然见到阳光会受到很大的刺激，但是如果光是由眼睛发出的话，不应该有这么大的刺激。他举起吃饭用的铁碗，将它放在阳光透过墙壁缝隙射到地面上形成的光斑上，意外地发现墙面上也形成了光斑，而且光斑的位置会随着碗和入射光线的角度变化而变化，但是入射光线和铁碗所成的夹角与印到墙上的光斑和铁碗连线与铁碗成的夹角相等，他仔细思考了这个现象，发现光是由人的眼睛发出的理论是错误的，因为如果光是人眼发出的话，那么调节铁碗的倾斜角度，墙壁上的光斑位置不应该发生改变。经过多次实验后埃尔哈森得出了影响近代光学研究最重要的结论：光是由物体发出的，人眼只是一个接收器，而且光在金属表面反射遵循反射定律。在历经了 12 年的牢狱之灾后，埃尔哈森并没有丧失对于生活的希望，出狱后他立即篆书向世人传授自己关于光的理论，引起了科学界的轰动。

时间的齿轮总是在不停的转动着，随着天主教传入欧洲，对于光的探索成为教会控制和启发信徒的工具，他们需要学术界的著名人物为他们工作，去帮助理解光这个连接人类与神明的纽带。其中最著名的就是哲学家笛卡尔，他认为上帝是一个手艺无比精巧的制表匠，世界在上帝的精心安排下按照机械的方式运作着，光的本质是旋转的粒子，由于通过三棱镜后粒子的旋转速度会发生改变，所以白光透过三棱镜会分成多种颜色的光。在笛卡尔的理论体系中，白光是纯光，世界是由一个个零件相互配合运作起来的，他甚至做了一个非常残忍的实验：取下牛的眼睛，并且剥离出晶状体，利用晶状体类似于凸透镜的特征来证明世界确实是由一个个机械的零件所组成的。他的这一晦涩以及逻辑不严密的理论在欧洲引起了很多人的反对，其中就包括英国的艾萨克 · 牛顿。牛顿那时正在剑桥上学，他也正为探寻光的本质而废寝忘食。牛顿这个人性格非常孤僻，没有朋友，说话非常有攻击性，而且精力充沛，满足了人们对于天才的各种设想。他做了一个非常严格的实验来证明笛卡尔的理论是错误的，白光并不是纯光，而是红橙黄绿青蓝紫光混合形成的光。他先用一块幕布挡住窗外射入的阳光，只留出一个很小的缝隙，光线通过这个小的缝隙射入屋内。牛顿在光线的路径上放上一个三棱镜，白光透过棱镜会分成红橙黄绿青蓝紫光，他采用另一块幕布挡住分解后的光，不同颜色的光会印在幕布的不同位置，他用锐物在红光对应的位置扎一个洞，这时通过两层幕布的只有红光。牛顿尝试在红光的路径上再放上一个三棱镜，更据笛卡尔的理论，红光透过三棱镜应该也会产生其它颜色的光，而牛顿认为红光是纯光，透过三棱镜不会再产生其它颜色的光。经过多次实验，牛顿证实了他的想法才是正确的，他撰文发表了自己的实验结果，引起人们的哄抢，牛顿也在学术界初露锋芒。

8.2 17 世纪-19 世纪初

《圣经》中描述宇宙是以地球为中心旋转的，各种行星和恒星都在以地球为球心，半径不同的球面上围绕地球运动，它们永远不会穿过球面形成的屏障，但是丹麦物理学家第谷通过观察彗星的运动轨迹，得出彗星已穿过遥远的行星所环绕的太空的结论。第谷记录了当时最为详尽的星象数据，在他去世后他的弟子开普勒通过分析这些数据得出天文学里最伟大的三大力学定律—后世将其称为开普勒三大定律。

在 17 世纪的意大利，玻璃产业十分流行，富豪们都热衷于收藏各种精美的玻璃制品，因此意大利的玻璃厂商通过不断改良工艺，制造出世界上质量最好的玻璃。玻璃是一个奇怪的东西，它能够改变光线的路径，通过改变玻璃表面的曲率可以实现对于光线的聚焦和发散，这吸引了在当时还只是穷数学教授的伽利略的注意。他研究透镜的原因是他认为玻璃有很大的商业价值，如果制造出有用的器件卖给政府的话，他不但可以得到一笔丰厚的资金，还可以名声大噪。伽利略在当地的玻璃工厂购买了几片玻璃透镜，然后便在家苦心钻研，有一天他突然发现如果把两片凸透镜以一定的距离放在一条直线上面的话，可以很清楚地看到远方的物体。狡猾的伽利略立即想到了这一器件的用途：在战争中可以提前十几分钟看到敌方的位置，方便安排作战计划；在贸易中可以提前看到货轮中的商品，以便率先调整当地商品的价格，获取更多的利润。利用这两个天衣无缝的理由，伽利略将这一被后世称为“望远镜”的器件卖给了当地政府，并获得了丰厚的报酬。再后来，他利用自创的望远镜观察星空，得出了最为清晰详尽的星象，并撰写了天文学著作《星际信使》，成为了红极一时的天文学家。

在伽利略发明望远镜后不久，在欧罗巴大陆的大不列颠岛有一位发明家罗伯特·胡克，他认为既然玻璃透镜的组合可以看到宏大的宇宙中的星球，是否也可以通过不同的组合看到细小的物体呢？通过将望远镜中的前面一个透镜更换为凹透镜，胡克发明了著名的显微镜。在当时英国有许多文人会定期集会讨论最新颖的科学问题，其中就包括珊瑚是属于植物还是动物？胡克通过观察珊瑚的细胞结构，得出珊瑚是动物的结论，这是显微镜在生物学研究中的开端。

伽利略发明的望远镜能够观察到遥远太空中的星球，给人们带来极大的震撼，但是透镜的透光率太低了，而且会产生相差，人们也在不断寻求改进的方法。英国的物理学家弗里德里希·威廉·赫歇尔是第一个做出此贡献的人，他通过将望远镜后面的透镜改为凹面镜，提高了吸收的光强，有效的降低了像差，通过改进后的望远镜，赫歇尔发现了天王星。

技术的进步往往同时会带动科学的发展。在望远镜和显微镜发明后，很多的科学投入生物学的研究，人们逐渐意识到不是所有的物种都是由上帝凭空制造的，不同的物种有时却有相同的祖先。澳大利亚的生物学家达尔文率先提出了“进化论”的观点，他认为“物竞天择，适者生存”。但是这个观点一提出就遭受到拥护

基督教的欧洲学者的疯狂驳斥，其中一位物理学家通过假设太阳上全部通过都是燃烧碳产生能量得出太阳的年龄最多只有几千年的结论，他以此驳斥进化论，因为后者解释物种的进化需要经过上万年甚至上亿年的时间。直到 1904 年拉塞福发现一种放射性元素可以让太阳燃烧几亿年 (就是氘和氚)，间接地支持了达尔文的进化论。

18 世纪末，英国率先进行第一次工业革命，其中染料业的发展改变了人们对于自然与色彩之间关系的认知。过去人们都认为每一种色彩对应于自然界中的一种或一些材料，但是染料业的发展打破了这一传统思维，人们可以随心所欲地制配出各种颜色的染料，实现对于光和色彩的操控。与此同时，大不列颠岛上的另一位科学家普里斯特利正着手研究光对于生命的影响。他首先将一只老鼠放在密封的玻璃罩内，发现没过多长时间老鼠就嗝屁了，但是如果将老鼠换为绿色植物的话，只要提供充足的光照，它就可以生存很长时间。接着普里斯特利尝试将老鼠和绿色植物一起放在封闭的玻璃罩内，并提供光照，令人惊讶的是老鼠也可以生存更长的时间。他认为绿色植物在光照下会产生“豪华气体”，这种气体会给动物提供生存的能量，会让火焰燃烧的更旺，而且世界上只有他自己和那只老鼠闻过这种气体。现在我们知道这其实是绿色植物进行的光合作用，吸收二氧化碳转换为氧气。

8.3 19 世纪初-20 世纪

进入 19 世纪初，剑桥大学有一个在音乐方面同样具有才华的物理学院的学生汤玛斯·杨格，他在弹奏钢琴时发现如果同时按下不同音调的两个键，会听到大小周期性变化的音。杨格认为不同音调的音相遇后不是相加就是相减，因此会产生脉冲声波信号，他大胆地将光也类比成一种波，这样就能解释著名的双缝干涉现象。正如不同频率的声音有不同的声调，不同频率的光也有不同频率的颜色，因此我们所看到的可见光其实是大脑的杰作，自然界存在各种频率的光，我们人眼所能识别的只有其中的一部分而已。杨格不止于提出理论假设，他还做了一个很有名的实验，他将一个圆形转盘均匀地分成三等份，分别涂上红绿蓝三种颜色，然后快速转动转盘，他发现当转盘的转速达到一定程度后，转盘看起来就是白色，因此杨格认为世界上所有的颜色都是红绿蓝三原色按一定比例混合而成的，这就是我们如今在各个智能电子设备上都使用的三原色原理。

到了 1831 年，法拉第发现闭合导体回路在磁场中运动时有时会产生电流，但是无法解释其背后的原理。直到一位划世纪的物理学巨匠-麦克斯韦的出现，这一问题才得以解决。麦克斯韦是一位极具数学天赋的物理学家，他试图用数学语言总结出前人对电学和磁学的研究结果，并尝试寻找电和磁之间的联系。终于在 19 世纪末，经过麦克斯韦和他的继任者的不懈努力，电磁学的理论研究最终总结为由四个方程组成的方程组:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{cases}$$

这四个方程在电磁学中的地位类似于牛顿方程在力学中的地位一样。麦克斯韦利用这个方程组还得出了一个非常重要的的结论-光是一种电磁波！至此，人类对于光的理解到达了一个前所未有的高度，人类可以更加方便地操纵光，人类变成了自己的“上帝”。

但是科学的发展总是无止尽的，我们知道的越多，我们就越感到无知。1900 年，普朗克在研究黑体辐射现象时发现，似乎只有假设光是粒子，才能很好的用理论去解释实验结果，但是就连普朗克本人也不相信光量子的存在。黑体辐射现象的研究为科学家打开了量子物理的大门，在后续的一百多年内，无数的物理学家投身量子科学的研究。经过德布罗意，爱因斯坦等人的努力，现在科学界主流的观点是光具有波粒二象性，当光的波长较长时则倾向于表现出光的波动性，当光的波长较短时倾向于表现出光的粒子性。到了 21 世纪，对于光学的研究从未停止，仍有许多未知的奥秘等待着人们去探索…